CORSO ELEMENTARE

DI

STUDI MILITARI

COMPILATO

PER ORDINE DEL MINISTERO DELLA GUERRA

TRATTATO ELEMENTARE

DI

GEOMETRIA

AD USO

DELLE SCUOLE DELL'ESERCITO

TORINO
TIP. SCOLASTICA DI SEBASTIANO FRANCO E FIGLI
1861

PROEMIO

Lo sviluppo ognor maggiore che vanno acquistando le varie Scuole tanto degli ufficiali quanto dei sott'ufficiali dell'Esercito, ed il desiderio altresì di renderle quanto più si possa proficue, suggerirono al Ministero della Guerra la determinazione di somministrare ai varii Corpi una collezione completa di opere elementari, nelle quali i differenti rami dell'istruzione fossero svolti in modo chiaro, preciso ed uniforme.

Informati a tali principii già videro la luce il trattato di *Trigonometria Rettilinea* e quello di *Topografia*; siccome però a tali scienze è necessario precedano le cognizioni sulle Matematiche elementari, così fu a tal uopo prescelto siccome testo ufficiale per la Geometria, il trattato del professore Marta (già in uso nelle varie Scuole dello Stato), del quale ordinavasi dal Ministero predetto una ristampa. A questa si procedette per cura del Corpo Reale di Stato Maggiore, introducendovi alcune aggiunte e poche

variazioni indispensabili allo scopo proposto colla compilazione dei varii libri di testo.

La Geometria abbracciando una quantità di proposizioni, le quali tutte debbono enunciare o la verità che si vuol dimostrare, od il quesito che si vuol risolvere, ne consegue che la ristampa di quest'opera non poteva dividersi ed ordinarsi in capi e paragrafi conformemente alle altre, senza ricorrere alle lunghe e continue ripetizioni degli enunciati, la qual cosa, senza nulla giovare alla chiarezza, avrebbe solo contribuito a rendere più voluminoso il trattato. Si conservava perciò l'ordine stesso delle proposizioni, ed un'ugual partizione della materia; si sopprimevano soltanto alcuni quesiti, la cui soluzione era inchiusa in quella di quesiti affatto analoghi; si ommettevano i pochi cenni intorno alle scale ed ai piani, perchè assai più diffusamente tali cose si trovano svolte nel trattato di Topografia; si abolivano le dimostrazioni per riduzione all'assurdo dei teoremi relativi alla misura della circonferenza e dell'area del circolo, della superficie convessa del cilindro, e del cono retto, della superficie della sfera, e così dei volumi della sfera, del cilindro, del cono; dimostrazioni tutte, le quali, partendo dalla considerazione del circolo siccome un poligono regolare di un numero infinito di lati, si deducono per analogia e riescono di una maggiore evidenza, più facili a ritenersi, ed egualmente rigorose.

Unitamente alle proposizioni s'intercalavano nel testo, come già si era praticato per gli altri trattati già stampati, le apposite figure, e si aggiungeva finalmente un indice delle varie materie.

Nell'adottare frattanto il presente Trattato per le varie Scuole militari, egli è opportuno avvertire:

1° Che per le scuole degli ufficiali l'insegnamento debba versare sull'intiera materia;

2° Che per quelle dei sott'ufficiali debbansi ommettere le propòsizioni X, XI, XII, XIII e XVIII del libro 8°, ed i problemi, la cui soluzione dipende da equazioni di 2° grado, o da estrazione di radici cubiche.

Torino, addì 1° aprile 1857.

			ERRATA	CORRIGE
Pag. 166	*linea*	5	260 gradi	360 gradi
» 239	»	15	$=\frac{1}{3}a(N^2+Mm+m^2)$	$=\frac{1}{3}a(M^2+Mm+m^2)$

ELEMENTI DI GEOMETRIA.

NOZIONI PRELIMINARI.

Annullando col pensiero tutti i corpi, rimane tuttavia nella mente l'idea di un'estensione, o spazio immenso, che si estende in ogni verso indefinitamente, e che si chiama perciò *estensione infinita*, o *indefinita*, o *assoluta*. Ogni porzione di quest' estensione infinita, o occupata da un corpo, o limitata a volontà in una maniera qualunque, è un'*estensione finita*, o *limitata*, o *relativa*. L'estensione assoluta, secondo il giudizio che può farne l'umana intelligenza, è come un tutto invariabile, che non può misurarsi, nè capirsi colla mente: ma l'estensione relativa varia in un' infinità di modi, ha proprietà diverse secondo la diversa maniera ond'è limitata, e può essere misurata.

Geometria è la scienza, che ha per oggetto le proprietà e la misura dell'estensione.

Nell'estensione finita, cioè nello spazio occupato dai corpi si distinguono tre dimensioni, che sono *lunghezza, larghezza*, e *profondità* o *altezza*.

Queste tre dimensioni sono attributi necessari del corpo,

giacchè il supporlo privo solamente di una di esse, sarebbe annientarlo affatto.

Ogni corpo occupando una determinata porzione dello spazio è compreso tra certi limiti, che lo separano dallo spazio indefinito che lo circonda. Questi limiti, che hanno solamente lunghezza e larghezza senza profondità, si chiamano *superficie*. Le superficie sono dunque i luoghi della separazione d'un corpo dal restante spazio, ed appartengono egualmente all'uno ed all'altro.

Quando un corpo è terminato da più facce, o superficie distinte le une dalle altre, queste superficie hanno anch'esse i loro limiti nei loro scambievoli incontri, o intersecazioni due a due; questi limiti delle superficie non hanno nè profondità, nè larghezza, ma solamente lunghezza, e si chiamano *linee*. Una linea rappresentando i luoghi d'incontro di due superficie, appartiene egualmente alle due superficie, delle quali essa segna l' intersecazione comune; e siccome una medesima superficie può essere incontrata da un'infinità di altre superficie distinte, ne segue che una stessa superficie può contenere un'infinità di linee.

Finalmente le linee che terminano le diverse facce di un corpo, hanno anch'esse i loro limiti nei loro vicendevoli incontri; questi limiti delle linee non hanno nè profondità, nè larghezza, nè lunghezza, e si chiamano *punti*. Così un punto essendo il luogo d'incontro di due linee, ed una medesima linea potendo essere incontrata da un'infinità di altre linee in altrettanti luoghi differenti, ne segue che una stessa linea può contenere un' infinità di punti.

La certezza dell'esistenza delle mentovate tre specie di limiti deriva dal solo riflettere che, senza di essi, sarebbe assolutamente impossibile il giudicare della figura dei corpi.

Le superficie, le linee ed i punti considerati come limiti, e non come oggetti materiali, esistono dunque nel corpo: quantunque non possano esserne effettivamente separati. Ciascuno di questi limiti può nondimeno col pensiero considerarsi separatamente, facendo cioè astrazione da una, da due, ed anche da tutte tre le dimensioni del corpo. Anzi in virtù di questa facoltà

dell'intelligenza, è facile avvezzarsi a considerare il punto senza le linee che lo determinano, la linea senza le superficie, delle quali essa rappresenta l'intersecazione, la superficie senza il corpo o lo spazio, al quale serve di limite, e finalmente il corpo stesso come uno spazio totalmente immateriale; di modo che, quantunque le applicazioni più ordinarie della Geometria si facciano sopra oggetti materiali, le speculazioni astratte però e tutte le teoriche di questa scienza sono affatto indipendenti dalla considerazione della materia.

Le tre quantità, lo spazio, la superficie e la linea, possono considerarsi sotto due punti di vista differenti: cioè o per riguardo alla loro forma, o relativamente alla loro grandezza. Nel primo caso esse si chiamano colla denominazione comune di *figure*; e nel secondo, con quella di *estensione*. Ma bisogna notare, che si chiama estensione a tre dimensioni, cioè in lungo, in largo ed in alto, quando si tratta di spazio, o di un corpo; estensione a due dimensioni (lunghezza e larghezza), quando si tratta di superficie; ed estensione lineare, o ad una sola dimensione (lunghezza), quando si tratta di una linea.

Queste tre specie di estensione, riferite ciascuna alla sua propria unità, e considerate come misurate, prendono i nomi particolari di *Volume*, di *Area*, o di *Lunghezza*, secondo che si tratta di uno spazio, o di una superficie, o di una linea.

Così la lunghezza di una linea è il numero di unità lineari contenute in questa linea; l'area di una data superficie è il numero di unità superficiali contenute nella superficie data; ed il volume di un corpo è il numero di unità di spazio contenute nel corpo.

Due figure possono avere la medesima estensione senza avere la stessa forma: in questo caso esse si dicono *equivalenti*.

Due estensioni possono avere la stessa forma o figura, senza avere la medesima grandezza: allora esse si dicono *simili*.

E quando due figure, o due estensioni sono tali, che soprapposte l'una all'altra, o messe l'una dentro l'altra, si uniscono perfettamente insieme in tutte le loro parti; esse sono allora *equiva-*

lenti e *simili;* cioè hanno la medesima grandezza e la medesima forma; per esprimere questa doppia proprietà, si dice che le due figure, o le due estensioni sono *eguali.*

Spiegazione dei termini.

S'incontrano nella Geometria proposizioni di più specie, che si distinguono le une dalle altre con nomi differenti; così per esempio:

L'*Assioma* è una proposizione che contiene una verità evidente per se stessa, cioè che si può comprendere immediatamente senza bisogno della dimostrazione. Tali sono le seguenti:

1° Due quantità eguali ad una terza, sono eguali fra loro;

2° Due quantità eguali, accresciute o diminuite entrambe di una medesima quantità, danno risultamenti eguali;

3° La differenza di due quantità non si altera accrescendole o diminuendole entrambe della stessa quantità;

4° Due quantità eguali, moltiplicate o divise per lo stesso numero, danno prodotti o quozienti eguali;

5° Un tutto è maggiore di ciascuna delle sue parti; ed è eguale alla somma di tutte queste, ecc.

Il *Teorema* è una proposizione che contiene una verità, la quale non è per se stessa evidente, ma si deduce da verità note, per mezzo di un ragionamento che dicesi *dimostrazione.*

Il *Problema* è una proposizione, nella quale si propone una questione a risolvere.

Le soluzioni de' problemi di Geometria sono di due maniere, cioè *Grafiche* o *Numeriche.*

Le soluzioni grafiche consistono nel trovare o nel descrivere, coll'aiuto del compasso e della riga, certe figure, o linee incognite, che hanno una relazione determinata con altre figure, o linee date.

Le soluzioni geometrico-numeriche consistono nelle appli-

cazioni particolari dei principii, o regole generali relative alla misura delle differenti specie di estensione.

Il *Postulato* è una proposizione contenente una verità o un principio di scienza così chiaro, da potersi facilmente ammettere sulla semplice dimanda, e senza dimostrazione.

Le verità dei postulati debbono dunque avvicinarsi, riguardo alla loro chiarezza, alla natura di quelle degli assiomi.

Il *Lemma* è una proposizione, in cui si stabilisce un principio, che può talvolta non avere alcuna relazione colle cose già dette, ma che gioverà per dimostrare le proposizioni seguenti.

Il *Corollario* è una *conseguenza* dedotta immediatamente da una o più proposizioni già dimostrate.

Lo *Scolio* è un'osservazione fatta sopra una o più proposizioni, tendente a far vedere la loro connessione, il loro uso, la loro estensione o le restrizioni cui vanno soggette.

L'*Ipotesi* è una supposizione fatta sia nell'enunciazione di una proposizione, sia nel corso di una dimostrazione.

Così l'enunciazione di un teorema qualunque si compone generalmente di due parti distinte, delle quali la prima si chiama *ipotesi*, ed è una supposizione fatta sopra un soggetto qualunque; la seconda è la conclusione, o la conseguenza dell'ipotesi fatta.

Chiamasi proposizione *reciproca*, o *inversa* di un' altra data, quella che si forma rivoltando in senso inverso l'enunciazione di questa, cioè prendendo come ipotesi la conseguenza della proposta, e conchiudendone come conseguenza l'ipotesi primitiva. Ma è da notare, a questo riguardo, che supposte vere le proposizioni dirette, non sono sempre vere le loro inverse, come si può facilmente vedere nell'assioma 1° qui sopra notato, il quale, preso inversamente, diventerebbe una proposizione falsa.

LIBRO PRIMO

Definizioni.

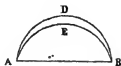
I. Il *Punto* è il limite di una linea, o il luogo d'incontro di due linee: esso non ha nè figura, nè estensione, nè parti, e differisce perciò dagli altri oggetti della Geometria, che sono tutti *descrittibili* e *misurabili*. Il punto siccome privo di ogni dimensione, dee sempre distinguersi dal segno materiale che ne indica la posizione nello spazio.

II. La *Linea* è una lunghezza senza larghezza. I limiti della linea sono i due punti, in cui finisce. La linea può essere retta o curva.

III. La linea retta è quella che segna il più corto cammino tra due punti. È manifesto che tra due punti può sempre tirarsi una linea retta; che può tirarsene una sola, essendo un solo il cammino più corto tra essi; e che può anche intendersi prolungata da ambe le parti indefinitamente. Tutte le linee rette soprapposte le une alle altre *coincidono* perfettamente insieme, e formano così una sola linea. Perchè abbia luogo questa *coincidenza in tutta la loro estensione indefinita*, basta che abbiano due punti comuni: dal che s'inferisce: 1° che due punti determinano com-

piutamente la posizione di una retta; 2° che due rette distinte non possono avere che un solo punto comune.

IV. Qualunque linea, che non è retta, nè composta da linee rette, dicesi curva. Tra due punti può condursi un' infinità di linee curve diverse. Così AB (fig. 1) è una linea retta; AEB e ADB sono linee curve.

Fig. 1.

V. *Superficie* è un'estensione in lunghezza e larghezza senza profondità. I limiti della superficie sono le linee in cui finisce. La più semplice di tutte le superficie è la superficie piana, che dicesi anche semplicemente *Piano*.

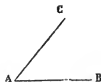
VI. Il *Piano* è quella superficie su cui può adattarsi in tutti i versi una linea retta. Un piano, quantunque terminato, può concepirsi esteso al di là de' suoi limiti indefinitamente.

VII. Ogni superficie che non sia piana, nè composta di superficie piane, chiamasi superficie curva. Tutti i piani sono della stessa natura, e possono soprapporsi e coincidere insieme; ma le superficie curve variano all'infinito.

VIII. *Solido*, o corpo geometrico, è tutto ciò che riunisce le tre dimensioni dell'estensione.

IX. Chiamasi *angolo* la superficie piana indefinita compresa fra

due rette AB, AC (fig. 2) che s'incontrano in un punto A. Il punto d'incontro A è il vertice dell'angolo; e le due rette AB, AC ne sono i lati. La grandezza dell'angolo non dipende dalla lunghezza dei lati, ma dalla maggiore o minore apertura di essi.

Fig. 2.

L'angolo si nomina ordinariamente con tre lettere BAC, o CAB, mettendo però sempre la lettera scritta sul vertice tramezzo alle altre due. Si può anche enunciare un angolo colla sola lettera del vertice, purchè non vi siano due o più angoli, che abbiano il vertice nello stesso punto.

È chiaro che due angoli sono eguali, quando i due lati di uno di questi angoli ponno sovrapporsi a quelli dell' altro angolo.

X. Quando una retta AB (fig. 3) incontra un' altra retta CD in maniera che gli angoli contigui o adiacenti BAC, BAD siano eguali

Fig. 3.

tra loro, la retta AB dicesi *perpendicolare* sulla CD; e ciascuno dei due angoli eguali BAC, o BAD chiamasi *angolo retto.*

Da questa definizione risulta chiaramente: 1° che la perpendicolare non pende nè da una parte nè dall'altra della retta sulla quale insiste; 2° che tutti gli angoli retti sono eguali fra loro; giacchè soprapposti gli uni agli altri *coincidono* tutti perfettamente insieme.

L'angolo retto essendo sempre di una medesima e determinata grandezza, può servire come termine di paragone, o come *unità angolare*, alla quale si possono riferire tutti gli altri angoli per la loro valutazione.

XI. Quando poi una retta AB (fig. 4) cadendo sopra di un'altra CD, fa con questa i due angoli adiacenti BAC, BAD disuguali fra loro, allora la retta AB dicesi obliqua alla retta CD. L'angolo BAC, maggiore del retto, chiamasi *angolo ottuso*, e l'angolo BAD, minore del retto, dicesi *angolo acuto*.

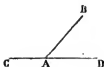
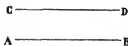
Fig. 4.

XII. Due rette AB, CD (fig. 5) diconsi *parallele*, quando sono poste in un medesimo piano, e prolungate indefinitamente da ambe le parti non possono mai incontrarsi.

Fig. 5.

XIII. Un piano chiuso tutto all'intorno da una o più linee, di-

cesi *figura piana*. La somma di tutte le linee, che rinchiudono la figura, chiamasi il *Perimetro*, o contorno della figura.

Una figura è o *rettilinea*, o *curvilinea*, o *mistilinea*, secondo che le linee che la comprendono, sono o tutte rette, o tutte curve, o parte rette e parte curve.

Le figure rettilinee diconsi comunemente *Poligoni*, e le linee rette del loro perimetro chiamansi lati del poligono.

XIV. Si chiama *poligono convesso* quello che ha tutti i suoi angoli coi vertici sporgenti in fuori, e coll'apertura rivolta verso l'interno del poligono. Questi angoli si chiamano *saglienti*, per distinguerli dagli angoli *rientranti*, che sono posti in senso contrario, cioè hanno il loro vertice verso l'interno del poligono, e l'apertura rivolta al di fuori. Nella parte dove vi sono angoli rientranti il poligono si chiama *concavo*.

Il carattere distintivo dei *poligoni convessi* si è che il loro perimetro non può essere tagliato in più di due punti da una retta diversa dai lati del poligono; oppure che un lato qualunque prolungato indefinitamente, non può mai incontrare il resto del perimetro.

XV. Due rette non potendosi incontrare che in un solo punto, non basteranno a chiudere un piano.

Il più semplice tra tutti i poligoni sarà dunque quello di tre lati, che chiamasi *Triangolo*.

Il poligono	di 4	lati dicesi	*Quadrilatero*;
»	di 5	»	*Pentagono*;
»	di 6	»	*Esagono*;
»	di 7	»	*Ettagono*;
»	di 8	»	*Ottagono*;
»	di 9	»	*Ennagono*;
»	di 10	»	*Decagono*.

Questa nomenclatura non si estende al di là del Decagono; con tutto ciò si dice ancora *Dodecagono* il poligono di 12 lati e *Pentedecagono* quello di 15.

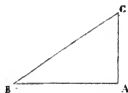
XVI. I triangoli distinguonsi rispetto ai lati e rispetto agli angoli.

Per rispetto ai lati, chiamasi *triangolo equilatero* quello che ha tutti tre i lati eguali (fig. 6); *triangolo isoscele*, quello che ha due lati eguali (fig. 7); e *triangolo scaleno*, quello che ha tutti tre i lati diseguali (fig. 8).

Fig. 6. *Fig.* 7. *Fig.* 8.

Rispetto agli angoli, chiamasi *triangolo rettangolo*, quello che ha un angolo retto; *triangolo ottusangolo*, quello che ha un angolo ottuso; e *triangolo acutangolo*, quello che ha tutti tre gli angoli acuti.

Nel triangolo rettangolo, il lato opposto all' angolo retto chiamasi *Ipotenusa*, ed i due lati, che comprendono l' angolo retto, diconsi *Cateti*. Così ABC (fig. 9) è un triangolo rettangolo

Fig. 9.

in A; il lato BC ne è l'*ipotenusa*, e gli altri due lati AB, AC sono i due *cateti*.

XVII. I quadrilateri si distinguono in Quadrati, Rettangoli, Rombi, Romboidi e Trapezi.

Il *Quadrato* è un quadrilatero che ha tutti i lati eguali e gli angoli retti (fig. 10).

Fig. 10.

Il *Rettangolo* ha tutti gli angoli retti, senza avere tutti i lati eguali (fig. 11).

Fig. 11.

Il *Rombo* ha tutti i lati eguali, senza avere gli angoli retti (fig. 12).

Fig. 12.

Il *Romboide* ha solamente i lati opposti eguali, gli angoli

opposti eguali, senza essere nè equilatero, nè rettangolo (fig. 13).

Fig. 13.

Queste quattro specie di quadrilateri diconsi generalmente *parallelogrammi*; perchè, come si vedrà a suo luogo, hanno i lati opposti paralleli fra loro.

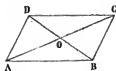
Il *trapezio* è un quadrilatero qualunque diverso dai quattro precedenti. D'ordinario però si chiama *trapezio* soltanto il quadrilatero che ha due lati soli paralleli (fig. 14).

Fig. 14.

XVIII. *Diagonale* è una retta tirata dentro di un poligono tra i vertici di due angoli non adiacenti ad uno stesso lato. Così nella fig. 15 AC, BD sono due diagonali.

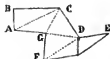
È chiaro che il triangolo non può avere diagonali.

Nel quadrilatero se ne possono tirar due, che si tagliano scambievolmente (fig. 15).

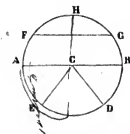
Fig. 15.

In un poligono qualunque *convesso* in tutto il suo contorno,

facendo partire le diagonali tutte da uno stesso angolo, il loro numero è eguale a quello dei lati, diminuito di tre unità; e queste diagonali dividono il poligono in tanti triangoli, quanti sono i lati, meno due.

Ed in generale, se un poligono qualunque, come (fig. 16)

Fig. 16.

ABCDEFG, si divide, mediante diagonali, in triangoli aventi i vertici nei vertici del poligono stesso, il numero dei triangoli è eguale al numero dei lati del poligono, meno due. Infatti se si distaccano gli uni dagli altri i triangoli ABC, ACG ecc.; e si ricompone poscia coi medesimi il poligono ABCDEFG mettendo successivamente ACG accanto ad ABG, CGD accanto al poligono ABCG, ecc.; si avrà una serie di poligoni ABC, ABCG, ABCDG, ABCDEFG, per ciascuno dei quali la proposizione è vera, perchè aggiungendo ad un poligono un triangolo, il quale abbia un lato comune col medesimo, si aumenta di un' unità così il numero dei triangoli come quello dei lati del poligono.

XIX. Il *circolo* (fig. 17) è una figura piana terminata da

Fig. 17.

una linea curva AHBE, che si chiama *circonferenza* o *periferia*,

e che ha tutti i suoi punti egualmente distanti da un punto interno C, che si chiama il *centro.*

Per farsi un'idea chiara della lunghezza della circonferenza di un circolo, bisogna intenderla tagliata in un qualche suo punto, e distesa come un filo in linea retta.

Qualunque retta, come CA, CE, CD ecc., tirata dal centro C alla circonferenza, dicesi *raggio* del circolo; e qualunque retta, come AB, che passa pel centro, ed è terminata d'ambe le parti dalla circonferenza, chiamasi *diametro* del circolo.

Dalla definizione del circolo risulta chiaramente:

1° Che tutti i raggi di uno stesso circolo sono eguali fra loro.

2° Che tutti i diametri sono anche eguali, e doppi del raggio.

3° Che due circonferenze descritte da centri diversi, ma collo stesso raggio, sono eguali. Perchè immaginando trasportato uno dei circoli sopra l'altro in modo, che i loro centri, ed i loro piani si confondano, le due circonferenze coincideranno perfettamente in tutta la loro estensione; senza del che tutti i raggi dell'una non sarebbero eguali a tutti i raggi dell'altra.

4° Che dato un centro sopra di un piano, e data la lunghezza del raggio, si potrà col compasso, o con altro strumento che ne faccia le veci, facilmente descrivere una circonferenza di circolo, la quale passerà per tutti i punti del piano, la cui distanza dal centro è eguale al raggio dato.

Una parte qualunque della circonferenza, come FHG, chiamasi *arco* di circolo; e la retta FG, che unisce le due estremità dell'arco FHG, dicesi *corda* del medesimo.

Un arco eguale al quarto della circonferenza prende il nome di *quadrante.*

Si noti che una corda qualunque FG corrisponde sempre a due archi FHG, ed FEDG, i quali presi insieme formano una circonferenza intiera. Quando una corda passa pel centro, essa diventa un diametro.

PROPOSIZIONE I. — *Teorema.*

Qualunque retta CD (fig. 18) *che ne incontri un'altra* AB, *fa con essa due angoli adiacenti* ACD, BCD, *la cui somma eguaglia due angoli retti.*

Fig. 18.

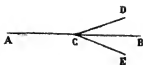
Dimostrazione. Dal punto C suppongasi tirata la retta CE perpendicolare alla retta AB: gli angoli ACE, BCE saranno retti (def. 10). Ora i due angoli ACD, BCD eguagliano visibilmente i tre angoli ACE, ECD, BCD, dei quali il primo è retto, e gli altri due presi insieme fanno l'angolo retto BCE; dunque la somma dei due angoli ACD, BCD è eguale a due angoli retti.

Corollario 1°. Se uno dei due angoli ACD, BCD è retto, anche l'altro debb'esserlo; e la retta CD sarà in questo caso perpendicolare alla AB.

Corollario 2°. Tutti gli angoli consecutivi che si possono fare dalla stessa parte di una retta AB, col vertice comune in C, presi insieme equivalgono a due angoli retti; perchè la loro somma è sempre eguale a quella dei due angoli ACD, BCD.

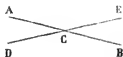
Proposizione II. — *Teorema.*

Se due angoli adiacenti ACD, DCB *presi insieme eguagliano due angoli retti, i due lati non comuni* AC, CB *formeranno una sola linea retta* (fig. 19).

Fig. 19.

Dimostrazione. Se AC, e CB non formassero una sola linea retta prolungando AC verso B, la parte prolungata cadrebbe fuori di CB, per esempio in CE, e sarebbe ACE una linea retta; dunque la somma degli angoli ACD, DCE sarebbe eguale a due angoli retti (prop. 1). Ma, per ipotesi, la somma degli angoli ACD, DCB è anche eguale a due retti; dunque (ass. 1) la somma ACD più DCB sarebbe eguale alla somma ACD più DCE; e togliendo da ambe le somme eguali l'angolo comune ACD, resterebbe la parte DCB eguale al tutto DCE; il che è impossibile. Dunque il prolungamento di AC non può cader fuori di CB, ossia AC e CB fanno una sola linea retta.

PROPOSIZIONE III. — *Teorema.*

Due rette AB, DE, *che si tagliano, fanno gli angoli opposti al vertice eguali tra loro* (fig. 20).

Fig. 20.

Dimostrazione. Infatti la somma dei due angoli adiacenti DCA, ACE è eguale a due retti (prop. 1); similmente la somma dei due angoli ACE e BCE è anche eguale a due retti; dunque queste due somme sono eguali fra loro (ass. 1); levando da ciascuna di esse l'angolo comune ACE, rimarrà l'angolo DCA eguale al suo opposto BCE.

Si dimostrerebbe medesimamente che l'angolo ACE è eguale al suo opposto BCD.

Corollario 1°. I quattro angoli fatti da due rette, che si tagliano, equivalgono a quattro angoli retti.

Corollario 2°. In generale tutti gli angoli, che si possono formare intorno ad un punto con un numero qualsivoglia di rette tirate dallo stesso punto in uno stesso piano, equivalgono sempre a quattro retti.

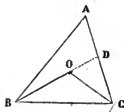
PROPOSIZIONE IV. — *Teorema.*

In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due (fig. 21).

Dimostrazione. Ciò è palese dall'essere ciascun lato una linea retta, che è la più breve che si possa tirare tra due punti (def. 3): dunque BA, per esempio, è minore di BC più CA.

Proposizione V. — *Teorema.*

Se da un punto qualunque O *preso dentro di un triangolo* ABC, *si tirano alle estremità di un lato* BC *le rette* OB, OC, *la somma di queste due rette sarà minore di quella degli altri due lati* AB, AC (fig. 21).

Fig. 21.

Dimostrazione. Si prolunghi BO fino in D: nel triangolo BDA il lato BD sarà minore di $BA+AD$ (prop. 4); aggiungendo ad ambe le parti DC, risulterà

$$BD+DC<BA+AC;$$

similmente nel triangolo ODC il lato OC è minore di OD più DC; ed aggiungendo BO da ambe le parti si avrà

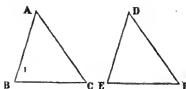
$$BO+OC<BD+DC;$$

ma si è già dimostrato essere $BD+DC<BA+AC$, dunque con più di ragione sarà $BO+OC<BA+AC$.

PROPOSIZIONE VI. — *Teorema.*

Due triangoli sono eguali, quando hanno un angolo eguale compreso tra due lati rispettivamente eguali ciascuno a ciascuno (fig. 22).

Sia l'angolo A eguale all'angolo D, il lato AB eguale al lato DE, ed il lato AC eguale a DF: i due triangoli ABC, DEF saranno eguali in tutte le loro parti.

Fig. 22.

Dimostrazione. Suppongasi il triangolo DEF sovrapposto al triangolo ABC di modo che il lato DE cada sopra il suo eguale AB, il punto D in A, ed il punto E in B: l'angolo D essendo, per ipotesi, eguale all'angolo A, il lato DF cadrà necessariamente sul lato AC, ed essendo questi due lati eguali tra di loro, il punto F cadrà in C, ed il terzo lato EF cadrà necessariamente sul lato BC; perchè tra due punti B e C si può tirare una sola linea retta; dunque i due triangoli coincideranno in tutte le loro parti; essi sono dunque eguali.

PROPOSIZIONE VII. — *Teorema.*

Due triangoli sono eguali quando hanno un lato eguale adiacente a due angoli rispettivamente eguali (fig. 22).

Sia il lato BC eguale al lato EF, l'angólo B eguale all'an-

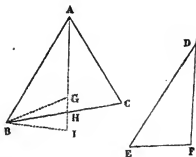
golo E, e l'angolo C eguale all'angolo F: il triangolo ABC sarà eguale al triangolo DEF.

Dimostrazione. Sovrappongasi il triangolo DEF al triangolo ABC in maniera, che il lato EF cada sopra il suo eguale BC, il punto E in B ed il punto F in C; l'angolo E essendo eguale all'angolo B, il lato ED cadrà sul lato BA, e l'angolo F essendo eguale all'angolo C, il lato FD cadrà sul lato CA; dunque il punto D comune ai due lati ED, FD dovendo cadere nello stesso tempo sopra le due rette BA, CA, cadrà necessariamente sulla loro intersezione in A; dunque i due triangoli coincideranno e saranno perciò eguali.

Proposizione VIII. — *Teorema.*

Se due triangoli hanno un angolo disegualé compreso tra due lati rispettivamente eguali, il terzo lato opposto al maggiore angolo sarà maggiore del terzo lato opposto all'angolo minore (fig. 23).

Sia nei due triangoli ABC, DEF l'angolo A > D; il lato AB = DE, ed il lato AC = DF; dico che il terzo lato BC opposto all'angolo A sarà maggiore del terzo lato EF opposto all'angolo D.

Fig. 23.

Dimostrazione. S'intenda il triangolo DEF soprapposto al

triangolo ABC, di modo che il lato DE cada sopra il suo eguale AB; l'angolo D essendo minore dell'angolo A, il lato DF cadrà dentro l'angolo BAC nella direzione AI per esempio, ed il punto F potrà, secondo i differenti casi, cadere, o dentro il triangolo BAC in G, o sopra il lato BC in H, o fuori del triangolo in I.

Primo caso. Quando il punto F cade in G, il triangolo DEF è rappresentato dal triangolo ABG, ed il lato EF dal lato BG: ciò posto, si ha la somma dei lati $BC+CA>BG+GA$ (prop. 5); levando da una parte CA, e dall'altra GA, che sono eguali tra loro, perchè amendue eguali a DF, rimarrà $BC>BG$, ossia $BC>EF$.

Secondo caso. Quando il punto F cade in H, il triangolo DEF è rappresentato dal triangolo ABH, ed il lato EF da BH; in questo caso si vede subito $BC>BH$; dunque sarà anche $BC>EF$.

Terzo caso. Quando il punto F cade in I, il triangolo DEF è rappresentato dal triangolo ABI, ed il lato EF dal lato BI.

Nel triangolo BHI si ha (prop. 4):

$$BH+HI>BI$$

e nel triangolo AHC si ha similmente

$$HC+HA>AC;$$

sommando insieme i primi membri di queste due ineguaglianze, ed i secondi membri parimente insieme, risulterà

$$BC+AI>BI+AC;$$

e levando dalla prima somma AI, e dalla seconda AC, che sono eguali tra loro, resterà $BC>BI$, ossia $BC>EF$.

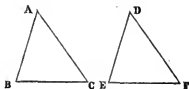
Scolio. La proposizione inversa ha egualmente luogo: cioè

se due triangoli hanno due lati rispettivamente eguali, ed il terzo lato ineguale, l'angolo opposto al terzo lato maggiore sarà più grande dell'angolo opposto al terzo lato minore. Infatti se l'angolo BAC, opposto al lato maggiore BC, fosse minore di EDF opposto al lato minore EF, sarebbe pure (dim. ant.) BC<EF, ciò che è contro l'ipotesi; e se fosse BAC=EDF, sarebbe BC=EF (prop. 6), il che è pure contro l'ipotesi.

Proposizione IX. — *Teorema.*

Due triangoli sono eguali quando hanno i loro tre lati rispettivamente eguali ciascuno a ciascuno (fig. 24).

Sia il lato AB=DE, AC=DF, e BC=EF; dico che sarà l'angolo A=D, B=E, C=F.

Fig. 24.

Dimostrazione. Se l'angolo A fosse maggiore o minore dell'angolo D, seguirebbe dal teorema precedente che il lato BC sarebbe maggiore o minore del lato EF; il che sarebbe contro l'ipotesi; l'angolo A non potendo essere nè maggiore, nè minore dell'angolo D, sarà per conseguenza A=D.

Si dimostra medesimamente che l'angolo B=E, e C=F.

Scolio. Dai tre teoremi precedenti, relativi all'eguaglianza de'triangoli, si può conchiudere che un triangolo è pienamente determinato quando si conoscono due lati e l'angolo compreso fra essi; o un lato e due angoli adiacenti a questo lato; oppure si conoscono i suoi tre lati.

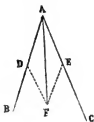
Si può ancora osservare che, in due triangoli eguali, gli angoli eguali fra loro sono sempre opposti a lati eguali, e viceversa.

Proposizione X. — *Problema.*

Dividere un angolo dato BAC *in due parti eguali* (fig. 25).

Risoluzione. Dal vertice A come centro, e con un'apertura di compasso presa ad arbitrio, dai lati AB, AC si taglino le parti AD, AE eguali tra loro; quindi dai punti D ed E come centri, e con un medesimo raggio, maggiore della metà della distanza DE, si descrivano due archi che si seghino in un qualche punto F; dal vertice A al punto F tirisi la retta AF; essa dividerà l'angolo BAC in due parti eguali.

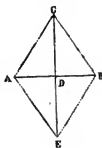
Infatti i due triangoli ADF, AEF avendo il lato AD=AE, il lato DF=EF, ed il lato AF comune, avranno l'angolo DAF=EAF (prop. 9); epperò l'angolo dato BAC è diviso per mezzo dalla retta AF.

Fig. 25.

Scolio. Ripetendo la medesima costruzione sulle due metà BAF e CAF dell'angolo proposto BAC, esso si dividerà in quattro parti eguali; e col mezzo di suddivisioni successive potrà anche dividersi in otto, in sedici ecc. parti eguali.

PROPOSIZIONE XI. — *Problema.*

Dividere una data retta AB *in due parti eguali* (fig. 26).

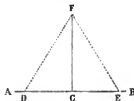
Risoluzione. Dalle due estremità A e B come centri, con uno stesso raggio maggiore della metà di AB, descrivansi due archi, che si seghino in C; similmente dagli stessi centri A e B descrivansi due altri archi, che si seghino al di sotto della retta AB in E; tra i due punti C ed E tirisi la retta CE; questa dividerà la retta data AB in due parti eguali.

Fig. 26.

Infatti nei due triangoli CAE, CBE essendo CA=CB, AE=BE, ed il lato CE comune, l'angolo ACD sarà eguale all'angolo BCD. Ora i due triangoli ADC, BDC avendo l'angolo ACD=BCD, il lato AC=BC, ed il lato CD comune, avranno pure il lato AD=DB (prop. 6); dunque la retta AB è divisa per mezzo in D.

Proposizione XII. — *Problema.*

Da un punto C *dato sopra una retta* AB *innalzare una perpendicolare a questa retta* (fig. 27).

Fig. 27.

A D C E B F

Risoluzione. Prendansi sulla retta AB, a destra ed a sinistra del punto C, due parti eguali CE=CD; indi dai punti D ed E come centri, e con uno stesso raggio descrivansi due archi, che si seghino in F; tirisi la retta CF, questa sarà perpendicolare alla retta AB.

Perchè ne' triangoli DFC, EFC essendo CD=CE, DF=EF, e CF comune, l'angolo DCF sarà eguale al suo adiacente ECF; dunque la retta CF sarà perpendicolare alla retta AB (def. 10).

Scolio. È chiaro che da un punto preso sopra una retta non si può alzare che una sola perpendicolare alla data retta.

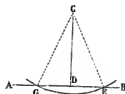
Proposizione XIII. — *Problema.*

Da un punto C *dato fuori d'una retta* AB, *abbassare una perpendicolare sopra questa retta* (fig. 28).

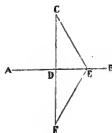
Risoluzione. Dal punto dato C come centro, e con un raggio preso ad arbitrio, ma però bastantemente grande, de-

scrivasi un arco che seghi la retta AB in due punti G, E; indi si operi come per dividere la GE per mezzo (prop. 11); la retta CD, tirata dal punto C sul mezzo di GE, sarà perpendicolare alla retta AB.

Perciocchè essendo GD=DE, CG=CE e CD comune, sarà l'angolo GDC=EDC.

Fig. 28.

Scolio. Da un punto dato fuori di una retta non si può abbassare che una sola perpendicolare a questa retta.

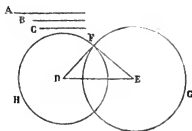
Infatti se CD, CE (fig. 29) fossero ambedue perpendicolari

Fig. 29.

sulla AB, prolungando una di esse CD, per esempio, di una quantità DF=CD, e tirando EF, i due triangoli DCE, DFE sarebbero eguali (prop. 6): dunque l'angolo DEC=DEF: ma DEC

essendo retto per ipotesi, anche DEF sarebbe retto; per conseguenza la linea CEF sarebbe retta (prop. 2), e si potrebbe allora tra i due punti C, F tirare due linee rette, il che è impossibile.

Proposizione XIV. — *Problema.*

Date le lunghezze A, B, C *dei tre lati di un triangolo, descrivere il triangolo* (fig. 30).

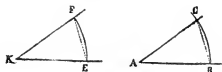
Fig. 30.

Risoluzione. Si prenda DE eguale al lato A; dal punto D come centro, e con un raggio eguale al secondo lato B descrivasi una circonferenza FH, o solamente un arco; poi dal punto E come centro, con un raggio eguale al terzo lato C descrivasi un'altra circonferenza FG, o meglio un arco che incontri il primo; finalmente dal punto F dove le due circonferenze, o i due archi si segano, tirinsi le rette FD, FE; DEF sarà il triangolo dimandato; poichè dalla costruzione fatta risulta manifestamente DE=A, DF=B, EF=C.

Scolio. Perchè con tre rette date possa costruirsi un triangolo, è necessario che una qualunque delle tre sia minore della somma delle due restanti; la quale condizione sarà adempiuta se

la maggiore sia minore della somma delle altre due; poichè, come si è veduto (prop. 4), il triangolo non può sussistere senza questa condizione.

Proposizione XV. — *Problema.*

In un punto A, *dato sopra una retta* AB, *formare un angolo eguale ad un angolo dato* K (fig. 31).

Fig. 31.

Risoluzione. Dal vertice K come centro, e con un raggio KE preso ad arbitrio descrivasi un arco EF che chiuda l'angolo dato K; indi dal centro A, col raggio AB=KE, descrivasi un arco indefinito BC; e dal punto B come centro, con un raggio eguale alla corda EF si tagli l'arco indefinito in C; si tiri la retta AC, l'angolo BAC sarà eguale all'angolo dato K.

Poichè i triangoli KEF, ABC avendo per costruzione i tre lati rispettivamente eguali, avranno pure l'angolo A=K.

Scolio. Con lo stesso mezzo si risolveranno i due problemi seguenti:

1°. *Dati due lati di un triangolo e l'angolo compreso da questi lati, descrivere il triangolo.*

2°. *Dato un lato di un triangolo coi due angoli adiacenti a questo lato, costrurre il triangolo.*

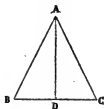
Per risolvere il primo basterà formare un angolo eguale all'angolo dato, prendere sui lati di quest'angolo due parti (cioè una per lato) rispettivamente eguali ai due lati dati, e unire con una retta le due estremità di queste parti.

Per risolvere il secondo problema, si prenderà una retta eguale al lato dato, ed alle due estremità di questa retta si formeranno due angoli rispettivamente eguali ai due angoli dati.

PROPOSIZIONE XVI. — *Teorema.*

Nel triangolo isoscele, i due angoli opposti ai lati eguali, sono anche eguali (fig. 32).

Nel triangolo ABC se il lato AB=AC, dico che sarà l'angolo C=B.

Fig. 32.

Dimostrazione. Dal vertice A tirisi la retta AD sul mezzo della base BC; i due triangoli ADB, ADC avranno i tre lati rispettivamente eguali, cioè AD comune, AB=AC per ipotesi, e BD=DC per costruzione: dunque l'angolo B sarà eguale all'angolo C (prop. 9).

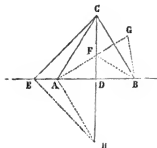
Corollario. Un triangolo equilatero è anche equiangolo: poichè esso è isoscele sopra ciascuno dei tre lati.

Scolio. Dall'eguaglianza dei due triangoli ABD, ACD si deduce medesimamente che l'angolo BAD=CAD, e che l'angolo BDA=CDA; dunque questi due ultimi sono retti. Quindi derivano manifestamente le conseguenze seguenti:

1° La retta tirata dal vertice di un triangolo isoscele sul mezzo della base, è perpendicolare alla base, e divide per mezzo l'angolo del vertice.

2° La perpendicolare abbassata dal vertice di un triangolo isoscele sopra la base, divide per mezzo la base, e l'angolo del vertice; e la perpendicolare innalzata sul mezzo della base passerà pel vertice.

3° Qualsivoglia punto C o F dalla perpendicolare CD innalzata sul mezzo di una retta AB (fig. 33) è equidistante dalle due estremità A e B di questa retta, perchè la perpendicolare DC passa pei vertici di tutti i triangoli isosceli che possono formarsi sulla retta AB presa per base. E qualunque punto G preso fuori della perpendicolare DC sarà inegualmente distante dalle due estremità A e B; perchè il punto G non può essere vertice di un triangolo isoscele fatto sulla base AB; infatti tirando le rette GA, GB, e FB, si avrà GB $<$BF$+$FG, ed essendo BF$=$AF, risulterà GB$<$AG.

Fig. 33.

4° Se due oblique, tirate da uno stesso punto sopra una medesima retta, sono eguali, esse saranno equidistanti dalla perpendicolare calata dallo stesso punto sopra la medesima retta. E viceversa, se le due oblique sono equidistanti dalla perpendicolare, esse saranno eguali fra loro.

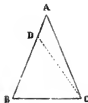
5° Due triangoli rettangoli sono eguali allorchè hanno l'ipotenusa ed un cateto rispettivamente eguali. Perchè dispo–

nendo i due triangoli, come ACD e BCD della fig. 33, cioè in modo che i due cateti eguali coincidano insieme in un cateto comune CD, ed i due angoli retti ADC e BDC siano adiacenti, allora i due altri cateti DA, DB formeranno una sola linea retta, alla quale il cateto comune CD sarà perpendicolare; e le due ipotenuse AC, BC essendo due oblique eguali saranno equidistanti dalla perpendicolare CD; epperò sarà DA=DB. Dunque ecc.

PROPOSIZIONE XVII. — *Teorema.*

Se due angoli di un triangolo sono eguali tra loro, i lati opposti a questi angoli saranno pure eguali, ed il triangolo sarà isoscele (fig. 34).

Nel triangolo ABC sia l'angolo B=C: dico che il lato AC sarà eguale al lato AB.

Fig. 34.

Dimostrazione. Se i lati AB, AC fossero diseguali, e fosse p. e. AB>AC, allora prendendo BD=AC, e tirando la retta CD, i due triangoli DBC e ACB avrebbero l'angolo B=C per ipotesi, ed i lati BD, BC rispettivamente eguali ai lati AC, CB; dunque il triangolo DBC sarebbe eguale al triangolo ACB (prop. 6), lo che è assurdo. Dunque i lati AB, AC sono eguali.

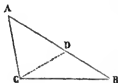
Corollario. Un triangolo equiangolo è anche equilatero.

Proposizione XVIII. — *Teorema.*

Se due angoli di un triangolo sono diseguali, i lati opposti sono parimente diseguali, ed al maggior angolo sta opposto il lato maggiore; e viceversa *se due lati son diseguali, gli angoli opposti saranno anche diseguali, ed al lato maggiore starà opposto l'angolo maggiore.*

Dimostrazione. 1° Nel triangolo ACB (fig. 35) sia l'angolo C>B, il lato AB opposto all'angolo C sarà maggiore del lato AC opposto all'angolo B.

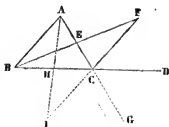
Infatti facendo l'angolo BCD=B, sarà CD=DB (prop. 17); ma la somma CD+DA è maggiore di AC; dunque sostituendo BD al suo eguale CD, sarà BD+DA ossia il lato AB maggiore di AC.

Fig. 35.

2° Sia il lato AB>AC; dico che l'angolo C opposto al lato AB sarà maggiore dell'angolo B, opposto al lato AC.

Perciocchè se l'angolo C fosse minore di B, il lato AB sarebbe pure minore di AC (dimostr. prec.), il che è contro l'ipotesi; e se fosse C=B, ne seguirebbe AB=AC (prop. 17); ciò che è anche contro l'ipotesi. Dunque l'angolo C sarà maggiore di B.

Proposizione XIX — *Teorema.*

In ogni triangolo ABC *prolungando qualsivoglia lato p. e.* BC *in* D, *l'angolo esterno* ACD *è sempre maggiore di ciascuno de' due interni* A, *e* B *non adiacenti all'esterno* (fig. 36).

Fig. 36.

Dimostrazione. Dividasi il lato AC per mezzo in E, e tirata la BE, si prolunghi in F di modo che sia EF=BE, e tirisi la retta CF; nei due triangoli AEB, CEF l'angolo AEB=CEF (prop. 3), e, per costruzione, il lato BE=EF, ed il lato AE=EC; dunque (prop. 6) sarà l'angolo ECF=EAB; e per conseguenza l'angolo ACD visibilmente maggiore di ECF, sarà pure maggiore di EAB.

Prolungando AC in G, dividendo il lato BC per mezzo in H, e compiendo la stessa costruzione precedente, si dimostra medesimamente che l'angolo BCG ossia il suo eguale ACD è maggiore dell'angolo ABC. Dunque l'angolo esterno ACD è maggiore di ciascuno de'due angoli interni non adiacenti A e B.

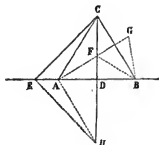
Corollario. 1° Segue dalla proposizione precedente che due angoli di un triangolo presi insiemé sono sempre minori di due angoli retti; poichè un angolo interno qualunque col suo adiacente esterno facendo sempre due retti, il primo di questi

con uno de' due rimanenti interni faranno meno di due retti; giacchè ciascuno de' due rimanenti interni è minore dell'esterno.

Si fa anche manifesto, che niun triangolo non può avere più che un solo angolo retto, nè più che un solo angolo ottuso.

Corollario 2°. Di qui e dalla proposizione 18ª si scorge ancora:

1° Che la perpendicolare CD (fig. 37) è più corta di qualunque obliqua CA tirata dallo stesso punto C sopra la stessa retta AB; poichè nel triangolo ACD la perpendicolare CD è opposta ad un angolo acuto CAD, e l'obliqua CA è opposta all'angolo retto CDA. Dunque (prop. 18) $CD < CA$.

Fig. 37.

2° Che tra due oblique CA, CE la più distante dalla perpendicolare è la più lunga; poichè nel triangolo CAE l'obliqua più distante CE è opposta ad un angolo ottuso EAC, mentre CA è opposta ad un angolo acuto CEA; dunque sarà $CE > CA$.

Queste due ultime proprietà della perpendicolare e delle oblique tirate da uno stesso punto sopra una medesima retta, possono anche dimostrarsi nella maniera seguente:

Prolungando la perpendicolare CD in H, di modo che sia

DH=CD, e tirando le rette AH, EH, sarà manifestamente AH=CA, ed EH=CE; ciò posto, nel triangolo CAH il lato CH è minore di CA+AH; dunque la perpendicolare CD, metà di CH, sarà minore dell'obliqua CA metà di CA+AH.

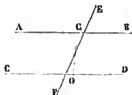
E nel triangolo CEH si avrà CE+EH>CA+AH (prop. 5). Dunque CE, metà di CE+EH, sarà maggiore di CA metà di CA+AH.

Quindi si deduce, che non possono darsi due oblique eguali dalla stessa parte della perpendicolare; e che da un punto ad una retta non possono tirarsi tre rette eguali.

La perpendicolare essendo la linea più breve che possa tirarsi da un punto ad una retta, essa sarà la vera misura della distanza del punto dalla retta.

Proposizione XX. — *Lemma.*

Quando due rette AB, CD (fig. 38), *parallele o concorrenti, sono tagliate da una terza retta* EF, *che si chiama* segante *o* trasversale, *ne risultano intorno ai punti d'intersezione* O, G *otto angoli, cioè quattro interni e quattro esterni: questi angoli paragonati due a due prendono nomi particolari secondo la loro situazione riguardo alle due rette tagliate, ed alla* segante EF.

Fig. 38.

Così 1°. *I due angoli* BGO, DOG *posti interiormente, e*

dalla stessa parte della segante, chiamansi interni dalla stessa parte.

2°. *Gli angoli* BGE, DOF *sono* esterni dalla stessa parte.

3°. *I due angoli interni* AGO, DOG *oppure* COG, BGO *(posti uno da una parte e l'altro dall'altra della segante, senza essere adiacenti) si chiamano* alterni interni; *e gli angoli* AGE, DOF *sono* alterni esterni.

4°. *Finalmente gli angoli* COG, AGE *o* DOG, BGE *posti dalla stessa parte della segante, uno interno e l'altro esterno, coll'apertura rivolta nello stesso verso, diconsi* angoli interni esterni opposti, *ovvero, per brevità,* angoli corrispondenti.

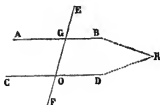
Poste le denominazioni precedenti, si vedrà facilmente, che quando la somma de'due angoli interni dalla stessa parte BGO, DOG eguaglia due angoli retti, gli angoli alterni interni AGO, DOG saranno eguali tra loro; perchè aggiungendo a ciascuno di questi lo stesso angolo BGO si ha ne'due casi una medesima somma, cioè due retti. E gli angoli corrispondenti DOG, BGE saranno anche eguali tra loro; giacchè BGE essendo eguale al suo opposto AGO, sarà anche eguale a DOG, qualora sia AGO=DOG.

Viceversa. Quando gli angoli corrispondenti BGE, DOG sono eguali, gli angoli alterni interni AGO, DOG sono anche eguali, e gli angoli interni dalla stessa parte BGO, DOG eguagliano due angoli retti.

Dunque la somma degli angoli interni dalla stessa parte eguale a due retti; gli angoli alterni interni eguali tra loro; e gli angoli corrispondenti eguali parimente tra loro, sono tre condizioni, che non possono mai andar disgiunte; di modo che data una qualsivoglia delle tre, risulteranno necessariamente le altre due.

Proposizione XXI. — *Teorema.*

Se due rette AB, CD *fanno colla segante* EF *due angoli interni dalla stessa parte* BGO, DOG, *la cui somma sia eguale a due retti, le rette* AB, CD *saranno parallele* (fig. 39).

Fig. 39.

Dimostrazione. Se le rette AB, CD prolungate s'incontrassero in un punto qualunque R, ne risulterebbe un triangolo RGO, nel quale la somma di due angoli sarebbe eguale a due retti; il che è impossibile (prop. 19 cor.) Dunque le rette AB, CD non potendo incontrarsi, saranno parallele (def. 12).

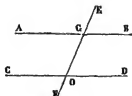
Scolio. Due rette perpendicolari ad una terza sono parallele; poichè se esse s'incontrassero si avrebbe un triangolo con due angoli retti, oppure si avrebbero due perpendicolari abbassate da uno stesso punto sopra una medesima retta, il che è assurdo.

Proposizione XXII. — *Teorema.*

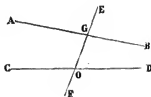
Se due rette AB, CD *fanno con una terza* EF *gli angoli alterni interni eguali* AGO=DOG, *ovvero gli angoli corrispondenti eguali* DOG=BGE, *queste due rette saranno parallele* (fig. 40).

Dimostrazione. Infatti quando o l'una o l'altra di queste due

condizioni ha luogo, gli angoli interni dalla stessa parte eguagliano due retti (prop. 20); dunque (prop. ant.) le rette AB, CD saranno parallele.

Fig. 40.

Proposizione XXIII. — *Postulato.*

Se due rette AB, CD (fig. 41) *tagliate da una terza* EF, *fanno con questa gli angoli interni* BGO, DOG *da una parte minori, e per conseguenza dall'altra parte maggiori di due retti, queste due rette prolungate bastantemente s'incontreranno dalla parte, ove gli angoli interni sono minori di due retti.*

Fig. 41.

Scolio. La verità di questa proposizione è incontestabile; ed il solo enunciato basta a convincere dell' incontro di due rette, che sono convergenti da una parte, e divergenti dall'altra. Perciò,

fra le varie maniere tenute da diversi autori nella dottrina delle parallele, si è creduto dover seguire quella di Euclide, che pare essere ancora la più facile, ed egualmente *rigorosa* che qualunque altra siasi cercato di sostituirvi.

Proposizione XXIV. — *Teorema.*

Se due rette parallele AB, CD (fig. 40) *sono tagliate da una terza retta* EF, 1° *la somma degli angoli interni dalla stessa parte* BGO, DOG *è eguale a due retti;* 2° *gli angoli alterni interni sono eguali fra loro;* 3° *gli angoli corrispondenti sono anche eguali fra loro.*

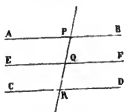
Dimostrazione. Se gli angoli interni dalla stessa parte BGO, DOG presi insieme fossero minori o maggiori di due retti, le due rette AB, CD s'incontrerebbero (prop. ant.), e non sarebbero più parallele, il che sarebbe contro l'ipotesi; dunque la somma degli angoli interni BGO, DOG è eguale a due retti.

La seconda e la terza parte del teorema sono egualmente manifeste, e derivano come corollari dalla prima (prop. 20).

Corollario. Se l'angolo DOG fosse retto, l'angolo BGO sarebbe parimenti retto; dunque ogni perpendicolare ad una delle due parallele è anche perpendicolare all'altra; cioè le linee parallele hanno le loro perpendicolari comuni.

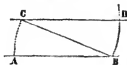
Proposizione XXV. — *Teorema.*

Due rette AB, CD *parallele ad una terza* EF, *sono parallele fra loro* (fig. 42).

Fig. 42.

Dimostrazione. Tirisi la segante PQR: poichè AB è parallela ad EF, l'angolo APQ sarà eguale al suo alterno FQP (prop. 24); medesimamente CD essendo parallela ad EF, l' angolo DRQ sarà eguale al suo corrispondente FQP; dunque l' angolo APQ sarà eguale a DRQ; e per conseguenza le rette AB, CD sono parallele (prop. 22).

Proposizione XXVI. — *Problema.*

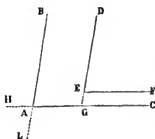
Per un punto dato C *tirare una parallela ad una retta data* AB (fig. 43).

Fig. 43.

Risoluzione. Dal punto dato C alla retta data AB tirisi una

retta qualunque CB; indi si formi l'angolo BCD eguale all'angolo ABC: la retta CD sarà parallela ad AB (prop. 22).

PROPOSIZIONE XXVII. — *Teorema.*

Gli angoli BAC, DEF, *che hanno i lati rispettivamente paralleli, e l'apertura volta nello stesso verso, sono eguali* (fig. 44).

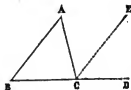
Fig. 44.

Dimostrazione. Si prolunghi DE in G; l'angolo DEF è eguale a DGC, perchè EF è parallela a GC; similmente essendo DG parallela a BA, l'angolo DGC è eguale a BAC; dunque l'angolo DEF è eguale a BAC.

Scolio. I due angoli DEF, HAL, che hanno i lati paralleli e l'apertura rivolta in parti opposte, sono ancora eguali; perchè DEF=BAC, e BAC=HAL, dunque DEF=HAL.

I due angoli DEF, BAH aventi i lati paralleli e l'apertura rivolta in parti diverse, e non opposte, presi insieme fanno due angoli retti.

PROPOSIZIONE XXVIII. — *Teorema.*

In ogni triangolo ABC (fig. 45), *la somma de' tre angoli è eguale a due angoli retti.*

Fig. 45.

Dimostrazione. Si prolunghi un lato qualunque, per es.; BC in D, e tirisi la retta CE parallela al lato AB: l' angolo ACE è uguale al suo alterno interno BAC, e l'angolo ECD è eguale al suo corrispondente ABC; dunque aggiugnendo da ambe le parti l'angolo BCA, risulterà la somma dei tre angoli del triangolo ABC eguale alla somma dei tre angoli BCA, ACE, ECD; ma questi tre ultimi fanno due retti (prop. 1); dunque i tre angoli di un triangolo qualunque riuniti eguagliano due angoli retti.

Scolio. In un triangolo qualunque prolungando un lato, l'angolo esterno ACD è eguale alla somma dei due angoli interni A, B non adiacenti all' esterno.

Corollario 1°. Conoscendo due angoli di un triangolo, o solamente la loro somma, si troverà il terzo sottraendo questa somma da due angoli retti.

Corollàrio 2°. Se due angoli di un triangolo sono rispettivamente eguali a due angoli di un altro triangolo, il terzo angolo del primo sarà eguale al terzo angolo del secondo ed i due triangoli saranno equiangoli tra loro.

Corollario 3°. Nel triangolo rettangolo la somma de' due an-

goli acuti equivale ad un angolo retto; e se il triangolo rettangolo è isoscele, allora ciascuno dei due angoli acuti è semiretto.

Corollario 4°. Due triangoli rettangoli sono eguali quando hanno l'ipotenusa eguale, ed un angolo acuto parimente eguale; poichè, in virtù del corollario precedente, i due triangoli avranno un lato eguale compreso fra due angoli eguali.

Corollario 5°. Nel triangolo equilatero ciascun angolo è la terza parte di due angoli retti.

PROPOSIZIONE XXIX. — *Teorema.*

Se in un triangolo ABC (fig. 46) *la distanza* DA *dal mezzo di un lato* BC *al vertice dell'angolo opposto* A, *è eguale alla metà dello stesso lato* BC, *l'angolo opposto* A *sarà retto.*

Fig. 46.

Dimostrazione. Essendo DA=DB , sarà l'angolo B=BAD (prop. 16); similmente essendo DA=DC, sarà l'angolo C=CAD; dunque l'angolo totale A è eguale alla somma de'due angoli B, C; e per conseguenza (prop. ant.) l'angolo A sarà retto, e gli altri due B, C riuniti faranno un altro retto.

Reciprocamente nel triangolo rettangolo ABC, il punto di mezzo dell'ipotenusa BC è equidistante dai tre vertici A, B, C; infatti formando l'angolo DAB eguale a B , risulterà l'angolo

DAC=C; dunque i due triangoli DAB, DAC saranno isosceli (prop. 17); epperò sarà DA=DB=DC.

Scolio. Se DA fosse minore della metà di BC, sarebbe (prop. 18) l'angolo BAD>B, e l'angolo DAC>C, epperò l'angolo totale A maggiore di B+C, e per conseguenza ottuso (prop. 28). Con un ragionamento simile si dimostrerebbe che l'angolo A è acuto quando DA fosse maggiore della metà di BC.

Proposizione XXX. — *Problema.*

Alzare una perpendicolare all'estremità di una retta data senza prolungarla (fig. 46).

Risoluzione. Sia AB la retta data, e si debba alzare la perpendicolare all'estremità A: sopra la retta data AB, o solamente sopra una parte di essa, che cominci da A, si formi un triangolo isoscele ABD; si prolunghi il lato BD di modo che sia DC=DB; tirisi la retta AC, questa sarà la perpendicolare dimandata. Perchè nel triangolo ABC essendo per costruzione DA=DB=DC, l'angolo A sarà retto (prop. ant.).

Proposizione XXXI. — *Teorema.*

La somma degli angoli di un poligono è eguale a due retti moltiplicati pel numero dei lati diminuito di due.

Dimostrazione. Si divida, mediante diagonali, il poligono in triangoli aventi i vertici nei vertici del poligono stesso, il numero dei triangoli sarà uguale al numero dei lati del poligono meno due (pag. 14); ma in ciascun triangolo la somma degli angoli è eguale a due retti; dunque la somma degli angoli di tutti i triangoli, la quale equivale alla somma degli angoli del poligono, è eguale a tante volte due retti quanti sono i triangoli, ossia al prodotto di due retti pel numero dei lati diminuito di due.

Scolio. Se il poligono ha angoli rientranti, questi sono maggiori di due retti.

Corollario 1°. La somma degli angoli di un quadrilatero è eguale a quattro retti.

La somma degli angoli del pentagono è eguale a sei retti, ecc.

Corollario 2°. In un poligono qualunque convesso (fig. 47), prolungando tutti i lati nello stesso verso, la somma di tutti gli angoli esterni è sempre eguale a quattro angoli retti. Perchè la somma degli angoli tanto interni che esterni, equivalendo visibilmente a tante volte due retti quanti sono i lati, la differenza tra questa somma e quella degli angoli interni sarà, da ciò che precede, manifestamente di quattro retti; e questa differenza è appunto la somma degli angoli esterni.

Fig. 47.

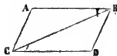
PROPOSIZIONE XXXII. — *Teorema.*

Se due lati opposti AB, CD *di un quadrilatero* ABDC *sono eguali e paralleli, gli altri due lati* AC, BD, *saranno anche eguali e paralleli, e la figura sarà un parallelogrammo* (fig. 48).

Dimostrazione. Tirisi la diagonale BC ; i triangoli ACB , DBC hanno per ipotesi il lato AB=CD, il lato BC comune, e l' angolo ABC=DCB, giacchè AB, CD sono , per ipotesi, paralleli ; dunque sarà il lato AC=BD, e l'angolo ACB=DBC ; dunque i lati AC, BD sono paralleli (prop. 22), e la figura ABDC è un parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXXIII. — *Teorema.*

Un quadrilatero, che abbia i lati opposti eguali due a due, è un parallelogrammo (fig. 48).

Fig. 48.

Dimostrazione. Nel quadrilatero ACDB sia AB=CD, ed AC=BD: tirando la diagonale BC, i due triangoli ABC, CDB saranno eguali, perchè hanno i tre lati rispettivamente eguali; dunque l'angolo ABC è eguale all'angolo DCB, e per conseguenza il lato AB è parallelo a CD. Si prova medesimamente che il lato AC è parallelo a BD; dunque il quadrilatero ACDB è un parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXXIV. — *Teorema.*

Ogni parallelogrammo ACDB *ha i lati opposti eguali, gli angoli opposti eguali, ed è diviso dalla diagonale* BC *in due triangoli eguali* (fig. 48).

Dimostrazione. I due triangoli ACB, BDC avendo il lato BC comune, l'angolo ACB eguale al suo alterno DBC, e l'angolo ABC = DCB, saranno eguali (prop. 7); dunque sarà AB=CD, AC=BD, l'angolo A=D; gli angoli B, C poi sono eguali, siccome compresi fra lati rispettivamente paralleli.

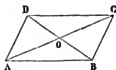
Corollario 1°. Due parallele comprese tra due altre parallele sono eguali.

Corollario 2°. Le due prime parallele, se sono perpendicolari

alle altre due, misureranno la distanza di queste ultime in due punti diversi; onde due parallele sono dappertutto equidistanti.

PROPOSIZIONE XXXV. — *Teorema.*

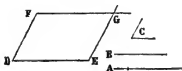
Le due diagonali AC, BD *di un parallelogrammo si tagliano vicendevolmente in due parti eguali* (fig. 49).

Fig. 49.

Dimostrazione. Nei due triangoli AOD, COB essendo il lato AD=BC, l'angolo ADO=CBO, e l'angolo DAO=BCO (prop. 24), questi triangoli saranno eguali (prop. 7); dunque il lato AO sarà eguale al lato OC, e DO=OB.

Corollario. Le due diagonali di un rombo si tagliano ad angoli retti. Perchè in questo caso essendo AB=BC, i due triangoli AOB, BOC hanno i loro tre lati rispettivamente eguali; dal che ne segue l'angolo AOB=BOC; dunque nel rombo questi due angoli saranno retti.

Proposizione XXXVI. — *Problema.*

Dati due lati contigui A, B *di un parallelogrammo, e l'angolo compreso* C, *descrivere il parallelogrammo* (fig. 50).

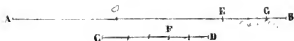
Fig. 50.

Risoluzione. Tirisi la retta DE eguale al lato A, si formi al punto D l'angolo EDF=C, e prendasi DF=B; indi pel punto F tirisi FG parallela a DE, e pel punto E tirisi EG parallela a DF; la figura DEGF sarà il parallelogrammo ricercato.

Scolio. In vece di tirare dai punti F, E le rispettive parallele ai lati DE, DF, si opererà più speditamente, se dal centro F col raggio A si descrive un arco, e dal centro E col raggio B si descrive un altro arco, che taglierà il primo in G; tirando le rette FG, EG, la figura sarà ancora un parallelogrammo, perchè avrà i lati opposti eguali due a due.

Se l'angolo C è retto, la figura sarà un rettangolo; se l'angolo C è retto, ed i lati A, B sono eguali, allora sarà un quadrato.

Proposizione XXXVII. — *Problema.*

Trovare la comune misura di due rette date AB, CD (fig. 51).

Fig. 51.

Risoluzione. Si porti la retta minore CD successivamente sopra la maggiore AB tante volte quante può esservi contenuta; e siavi contenuta due volte da A in E, col resto EB;

Si porti il resto EB sulla retta minore CD tante volte quante può esservi contenuto, e siavi, per es.; contenuto una volta da C in F, col resto FD;

Si porti il secondo resto FD sul primo EB, e siavi contenuto una volta da E in G, col resto GB;

Finalmente portando il terzo resto GB sul secondo FD, suppongasi che vi sia contenuto due volte esattamente senza alcun resto; l'ultimo resto GB sarà la comune misura delle due rette date AB, CD; cioè la piccola retta GB sarà esattamente contenuta in AB ed in CD.

Infatti essendo FD=2GB, risalendo si troverà EB=3GB, quindi CD=5GB, e finalmente AB=13GB. Dal che si vede che l'ultimo resto GB è contenuto esattamente 13 volte nella prima retta AB, e 5 volte nella seconda CD; dunque GB è la comune misura delle due rette.

Scolio 1°. Prendendo GB per unità di misura, le due rette AB, CD saranno espresse dai numeri 13 e 5; ed il rapporto di questi due numeri esprimerà quello delle due rette: e così in ciascun altro caso.

Può tuttavia avvenire che, comunque si continui l'opera-

zione, non si trovi mai un resto, che sia contenuto nel precedente un numero intero di volte; in questo caso le due rette non hanno comune misura; e diconsi perciò *incommensurabili;* la ragione delle due linee non potrà allora essere esattamente espressa in numeri interi; ma trascurando uno dei resti si troverà un valore della ragione prossimo al vero, e tanto più prossimo quanto sarà minore il resto negletto.

Scolio 2°. Nei libri seguenti si farà sovente uso di proporzioni, i cui termini saranno o linee o superficie o volumi; e si eseguiranno talvolta su questi termini alcune operazioni di calcolo, che non avrebbero alcun senso, se non s'intendessero fatte sopra numeri; gioverà dunque avvertire, che ogni qual volta si indicheranno moltiplicazioni o divisioni da eseguirsi sopra linee, superficie o volumi, queste operazioni si dovranno intendere fatte sui numeri che rappresentano quelle linee, quelle superficie o quei volumi, riferiti ciascuno alla unità della propria specie.

LIBRO SECONDO.

Ragioni o rapporti de' parallelogrammi e de' triangoli: misura delle figure rettilinee.

Definizioni.

I. *Superficie* o *area* di una figura è la quantità di estensione superficiale contenuta nel suo perimetro.

La parola *area* indica più specialmente una superficie che si considera come misurata, ed esprime il rapporto tra la superficie data e la sua unità di misura.

II. Figure *equivalenti* sono quelle che hanno aree eguali senza essere eguali in tutte le loro parti.

III. L'*altezza* di un triangolo è la perpendicolare AD (fig. 52)

Fig. 52.

abbassata dal vertice A di un angolo sul lato opposto BC preso per *base*.

Il vertice dell'angolo opposto alla base si chiama il vertice del triangolo.

IV. L'*altezza* di un parallelogrammo è la perpendicolare EF (fig. 53) compresa tra due lati opposti AB, DC presi per basi.

Fig. 53.

V. *L'altezza* di un trapezio è la perpendicolare EF (fig. 54) condotta tra i due lati paralleli AB, DC, che chiamansi le basi del trapezio.

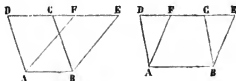
Fig. 54.

Scolio. È manifesto, che due parallelogrammi, o due triangoli compresi tra le medesime parallele, hanno la stessa altezza (prop. 34, corol. 2).

Viceversa: se due parallelogrammi, o due triangoli hanno la stessa altezza, e le basi sopra una stessa retta, essi saranno compresi tra due parallele.

PROPOSIZIONE I. — *Teorema.*

Due parallelogrammi che hanno basi eguali, ed altezze eguali, sono equivalenti (fig. 55).

Fig. 55.

Sia A B la base comune de'due parallelogrammi ABCD, ABEF; questi parallelogrammi avendo per ipotesi la stessa altezza, i loro lati superiori DC, FE cadranno sopra una stessa retta DE parallela alla base AB: ma per le proprietà dei parallelogrammi essendo AD=BC, AF=BE, e l'angolo DAF=CBE, perchè hanno i lati paralleli e l'apertura nello stesso verso, i due triangoli DAF, CBE saranno eguali.

Ora se dal quadrilatero ABED si leva il triangolo DAF, vi resta il parallelogrammo ABEF; e se dallo stesso quadrilatero ABED si leva il triangolo CBE, vi resta l'altro parallelogrammo ABCD; dunque (ass. 2) i due parallelogrammi ABCD, ABEF aventi la stessa base e la stessa altezza, sono equivalenti.

Corollario. Un parallelogrammo qualunque è equivalente ad un rettangolo di egual base e di eguale altezza.

Proposizione II. — *Teorema.*

Ogni triangolo ABC *è la metà di un parallelogrammo* ABCD *che abbia la medesima base e la medesima altezza* (fig. 56).

Fig. 56.

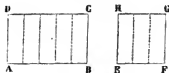
Dimostrazione. La diagonale AC dividendo il parallelogrammo ABCD in due triangoli eguali ABC, ACD, è chiaro che il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo ABCD.

Corollario 1°. Un triangolo qualunque è equivalente alla metà di un rettangolo di medesima base e di medesima altezza.

2°. I triangoli di egual base e di eguale altezza sono equivalenti.

Proposizione III. — *Teorema.*

Due rettangoli ABCD, EFGH *di eguale altezza* AD=EH, *stanno fra loro come le loro basi* AB, EF (fig. 57).

Fig. 57.

Dimostrazione. 1°. Supponendo le basi AB, EF commen-

surabili, e nella ragione, per esempio, di 5 al 3, allora dividendo AB in 5 parti eguali, EF conterrà 3 di queste parti; ed alzando da tutti i punti di divisione le perpendicolari alle basi, il rettangolo A B C D sarà diviso in 5 piccoli rettangoli, tutti eguali tra loro, perchè hanno le basi eguali e le altezze eguali; ed il rettangolo EFGH conterrà 3 di questi piccoli rettangoli; dunque il rettangolo ABCD sta al rettangolo EFGH come 5 sta al 3, ossia come la base AB sta alla base EF. Lo stesso ragionamento servirebbe per qualunque altra ragione delle basi diversa dalla supposta 5 al 3. Dunque quando le basi sono commensurabili si avrà sempre la proporzione

$$ABCD:EFGH::AB:EF.$$

2°. La medesima proporzione sussisterà ancora quando le basi AB, EF (fig. 58) saranno incommensurabili.

Fig. 58.

Infatti se potesse essere

$$ABCD:EFGH::AB:EO>EF,$$

dividendo AB in parti eguali e minori di FO, e portando una di queste parti successivamente sopra EO, da E verso O, vi cadrà almeno un punto di divisione I tra F ed O; alzando da questo punto la perpendicolare IK, a cagione delle basi AB, EI commensurabili, si avrà (Dim. ant.)

$$ABCD:EIKH::AB:EI;$$

questa proporzione e la precedente avendo gli stessi antecedenti, i loro consequenti saranno proporzionali; dunque risulterebbe

EFGH:EIKH::EO:EI,

che è una proporzione assurda; poichè il primo antecedente EFGH è minore del suo conseguente EIKH, mentre il secondo antecedente EO è maggiore del suo conseguente EI. Dunque il quarto termine non può essere maggiore di EF.

Si dimostra nello stesso modo che il quarto termine della proporzione non può essere minore di EF; dunque, qualunque sia la ragione delle basi, due rettangoli di eguale altezza stanno fra loro come le loro basi.

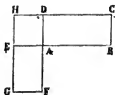
Scolio. Nei rettangoli potendosi cambiare le basi in altezze e *viceversa,* ne segue che due rettangoli di basi eguali stanno fra loro come le loro altezze.

Corollario. Due parallelogrammi, o due triangoli di eguale altezza stanno anche fra loro come le loro basi; e *viceversa.*

Proposizione IV. — *Teorema.*

Due rettangoli qualunque ABCD, AFGE (fig. 59) *stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le rispettive altezze, di modo che sarà*

ABCD:AFGE::AB×AD:AF×AE.

Fig. 59.

Dimostrazione. Si dispongano i due rettangoli in modo che

gli angoli in A sieno opposti al vertice, e si prolunghino i lati CD, GE finchè s'incontrino in H: i due rettangoli ABCD, AEHD avendo la stessa altezza AD, stanno fra loro come le loro basi AB, AE: similmente i due rettangoli AEHD, AFGE avendo la stessa altezza AE, stanno fra loro come le loro basi AD, AF; dunque si avranno le due proporzioni

ABCD:AEHD::AB:AE.

AEHD:AFGE::AD:AF.

Moltiplicando per ordine queste proporzioni, ed ommettendo il fattore AEHD comune ai due primi termini, risulterà

ABCD:AFGE::AB×AD:AF×AE.

Corollario. Due parallelogrammi, o due triangoli qualunque stanno anche fra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze: poichè i parallelogrammi sono equivalenti a' rettangoli di medesima base e di medesima altezza; ed i triangoli sono metà di parallelogrammi o di rettangoli parimente della stessa base e della stessa altezza.

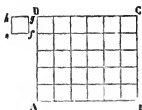
Quindi segue ancora che quando due rettangoli, o due parallelogrammi, o due triangoli sono equivalenti, le loro basi sono inversamente proporzionali alle loro altezze; perchè nell' ultima proporzione se ABCD fosse equivalente ad AFGE, risulterebbe AB×AD=AF×AE; e quindi

AB:AF::AE:AD.

Scolio. Misurare la superficie di una figura si è cercare quante volte essa contiene una data superficie presa per unità; si assume d' ordinario, per unità di superficie, il quadrato fatto sull'unità di misura lineare. Da questo modo di valutare in unità quadrate le superficie delle figure è derivata l'espressione *quadrare* una figura, o determinarne la *quadratura.*

Proposizione V. — *Teorema.*

L'area di un rettangolo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza (fig. 60).

Fig. 60.

Dimostrazione. Sia ABCD un rettangolo qualunque, ed *efgh* il quadrato preso per unità di superficie; il lato *ef* sarà l'unità lineare: misurando con questa unità la base AB e l'altezza AD del rettangolo, supponiamo per es. che AB sia di 6 unità e AD di 5; moltiplicando 6 per 5, il prodotto 30 indica che il rettangolo ABCD contiene 30 volte l'unità di superficie *efgh;* come l'inspezione della figura lo fa chiaramente vedere.

Ma i due numeri che esprimono quante volte l'unità lineare *ef* è contenuta nella base e nell'altezza del rettangolo potrebbero essere frazionari, ed anche incommensurabili; ciò non ostante il loro prodotto indicherà sempre quante volte il rettangolo contiene l'unità di superficie.

Infatti dal teorema precedente si ha

$$\mathrm{ABCD} : efgh :: \mathrm{AB} \times \mathrm{AD} : ef \times eh;$$

facendo $ef=1$, e valutando in numeri colla stessa unità la base AB e l'altezza AD del rettangolo, si avrà

$$ABCD : efgh :: \frac{AB}{ef} \times \frac{AD}{ef} : 1.$$

Dunque qualunque sieno i numeri esprimenti AB e AD, il loro prodotto è sempre eguale al numero di volte, che il rettangolo ABCD contiene l'unità di superficie *efgh*. Dunque il prodotto della base per l'altezza è la vera misura del rettangolo.

Scolio. Se l'unità lineare fosse per es. un piede o un trabucco o un metro ecc.; l'unità di superficie sarebbe il piede quadrato o il trabucco quadrato o il metro quadrato ecc.

Il quadrato essendo un rettangolo, la cui altezza è eguale alla base, la misura di un quadrato è eguale alla seconda potenza del suo lato: onde deriva il nome di quadrato di un numero usato nell'aritmetica come sinonimo della seconda potenza del numero.

I quadrati dei numeri 1, 2, 3, 4, ecc. essendo 1, 4, 9, 16, ecc.; ne segue che il quadrato costrutto sopra una retta doppia, tripla, quadrupla ecc. di una retta data, è quattro, nove, sedici ecc. volte maggiore del quadrato costrutto sopra questa retta.

PROPOSIZIONE VI. — *Teorema*.

L'area di un parallelogrammo qualunque è eguale al prodotto della sua base AB *per la sua altezza* EF (fig. 61).

Fig. 61.

Dimostrazione. Il parallelogrammo ABCD essendo equiva-

lente ad un rettangolo di egual base e di eguale altezza, e la misura di questo rettangolo essendo $AB \times EF$, ne segue che questo prodotto esprimerà pure la misura del parallelogrammo.

Proposizione VII. — *Teorema.*

L'area di un triangolo ABC (fig. 62) *è eguale al prodotto della sua base* BC *per la metà della sua altezza* DA.

Fig. 62.

Dimostrazione. Il triangolo ABC essendo la metà di un parallelogrammo della stessa base BC e della stessa altezza AD, e la misura di questo parallelogrammo essendo $BC \times AD$, la misura del triangolo sarà solamente la metà di questo prodotto ossia $BC \times \frac{AD}{2}$ oppure $\frac{BC}{2} \times AD$.

Corollario. Una figura rettilinea qualunque potendo sempre dividersi in triangoli, si avrà l'area della figura intiera misurando separatamente ciascuno di questi triangoli, e facendo la somma delle loro aree.

Proposizione VIII. -- *Teorema.*

L'area di un trapezio ABCD (fig. 63) *è eguale al prodotto della sua altezza per la semi-somma delle basi parallele* AB, DC.

Fig. 63.

Dimostrazione. Pel punto I, preso sul mezzo del lato BC, si tiri LK parallela al lato opposto AD, e si prolunghi DC in K.

I triangoli IBL, ICK saranno eguali, perchè IB=IC per costruzione, l'angolo LIB=CIK, e l'angolo IBL=ICK a cagione delle parallele AB, DK; dunque il trapezio ABCD è equivalente al parallelogrammo ALKD, ed ha per misura $EF \times AL$.

Ma AL=DK, ed a cagione di LB=CK si ha

$$AB+DC=AL+DK=2AL;$$

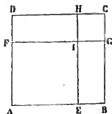
dunque $AL=\frac{AB+DC}{2}$; l'area del trapezio è dunque espressa per $EF \times \frac{AB+DC}{2}$; cioè, essa è eguale al prodotto dell'altezza per la metà della somma delle basi.

Scolio. Tirando la retta IH tra i due punti di mezzo dei lati non paralleli, la figura ALIH sarà un parallelogrammo, perchè AH metà di AD è eguale e parallela a LI metà di LK; dunque sarà $IH=AL=\frac{AB+DC}{2}$; e l'area del trapezio sarà

anche eguale al prodotto $EF \times HI$, cioè al prodotto dell' altezza per la linea che unisce i due punti di mezzo dei lati non paralleli.

PROPOSIZIONE IX. — *Teorema.*

Il quadrato fatto sulla somma di due rette è eguale ai due quadrati fatti sulle due rette, più due rettangoli contenuti dalle stesse due rette (fig. 64).

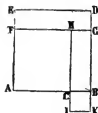
Fig. 64.

Dimostrazione. Sia ABCD il quadrato formato sulla retta $AB = AE + EB$; prendendo $AF = AE$, e tirando EH parallela ad AD, e FG parallela ad AB, il quadrato ABCD sarà diviso in quattro parti; la prima AEIF è il quadrato di AE, poichè si è preso $AF = AE$: la seconda IGCH è eguale al quadrato di EB, perchè essendo $AD = AB$, ed $AF = AE$, sarà $DF = EB = IG = IH$. Le altre due parti DFIH, EBGI sono due rettangoli visibilmente contenuti da lati rispettivamente eguali alle due parti AE, EB della retta AB; dunque si avrà

$$\overline{AB}^2 = (AE + EB)^2 = \overline{AE}^2 + 2AE \times EB + \overline{EB}^2,$$

che è l'espressione algebrica del quadrato del binomio $AE + EB$.

PROPOSIZIONE X. — *Teorema.*

Il quadrato fatto sulla differenza di due rette è eguale ai due quadrati fatti sopra queste due rette meno due rettangoli contenuti dalle stesse due rette (fig. 65).

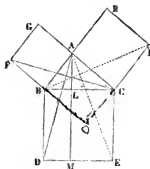
Fig. 65.

Dimostrazione. Sia AC la differenza delle due rette AB, CB; e sia ABDE il quadrato fatto sopra AB, e CIKB il quadrato fatto sopra CB; prendasi AF=AC, tirisi FG parallela ad AB, e si prolunghi IC in H: ACHF sarà il quadrato fatto sulla differenza AC; FGDE è un rettangolo contenuto da FG=AB, e da FE=CB; IKGH è un altro rettangolo contenuto da KG=AB, e da IK=CB; ciò posto, egli è evidente che il quadrato ACHF è eguale alla somma dei due quadrati ABDE, CIKB, diminuita dei due rettangoli FGDE, IKGH. In altri termini sarà

$$\overline{AC}^2 = (AB - CB)^2 = \overline{AB}^2 - 2AB \times CB + \overline{CB}^2;$$

che è l'espressione algebrica del quadrato del binomio AB—CB.

Proposizione XI. — *Teorema.*

In ogni triangolo rettangolo ABC (fig. 66) *il quadrato fatto sopra l' ipotenusa* BC *è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra i due cateti* AB, AC.

Fig. 66.

Dimostrazione. Siano BCED, BAGF, ACIH i quadrati fatti sopra i tre lati: dal vertice dell'angolo retto A si cali sopra l'ipotenusa BC la perpendicolare ALM, e tirinsi le rette AD, FC: i due triangoli FBC, ABD sono eguali fra loro, perchè hanno un angolo eguale compreso fra lati rispettivamente eguali; cioè l'angolo FBC=ABD, poichè sono entrambi composti di un angolo retto e di un angolo comune ABC, il lato FB=AB, come lati di uno stesso quadrato, e per la stessa ragione il lato BC=BD.

Ma il triangolo FBC è la metà del quadrato BAGF, perchè hanno la stessa base FB e la stessa altezza, essendo posti fra due parallele; parimente il triangolo ABD è la metà del rettangolo

BDML (prop. 2); dunque il quadrato BAGF, doppio del triangolo FBC, è equivalente al rettangolo BDML doppio del triangolo ABD. Si dimostra medesimamente che il quadrato ACIH è equivalente al rettangolo LMEC.

Ma i due rettangoli BDML, LMEC riuniti fanno il quadrato BCED; dunque il quadrato BCED, fatto sopra l'ipotenusa, è eguale alla somma dei quadrati BAGF, ACIH fatti sopra i cateti.

Supponendo i tre lati espressi in numeri si avrà

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2;$$

dalla quale si deduce

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2;$$

cioè il quadrato di un cateto è eguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro cateto.

Le due equazioni precedenti danno

$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}, \text{ e } AB = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2};$$

quindi dati due lati di un triangolo rettangolo, si può trovare il terzo lato incognito; cioè dati i due cateti, si troverà l'ipotenusa estraendo la radice quadrata dalla somma dei quadrati dei due cateti dati; e data l'ipotenusa ed un cateto, si troverà l'altro cateto estraendo la radice quadrata dalla differenza tra il quadrato dell'ipotenusa e quello del cateto dato.

Corollario 1°. Nel triangolo rettangolo ed isoscele il quadrato dell'ipotenusa è doppio del quadrato di ciascun cateto.

Quindi si conchiude, che la diagonale ed il lato di qualsivoglia quadrato sono incommensurabili, e stanno nella ragione

di $\sqrt{2}:1$. Poichè nel quadrato ABCD (fig. 67) essendo $\overline{AC}^2=2\overline{AB}^2$,

si avrà $\overline{AC}^2:\overline{AB}^2::2:1$, e quindi $AC:AB::\sqrt{2}:1$.

Corollario 2°. Il quadrato BCED ed i due rettangoli BLMD, LCEM (fig. 66) avendo la stessa altezza LM, stanno fra loro come le loro basi BC, BL, LC; dunque, sostituendo, in vece dei due rettangoli, i quadrati equivalenti de'cateti, si avrà

$$\overline{BC}^2:\overline{AB}^2:\overline{AC}^2::BC:BL:LC,$$

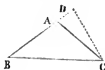
cioè il quadrato dell'ipotenusa sta al quadrato di un cateto, come l'ipotenusa stessa sta al segmento adiacente a questo cateto: ed i due quadrati dei cateti stanno fra loro come i segmenti dell'ipotenusa adiacenti a questi cateti.

Fig. 67.

Si chiamano qui segmenti le due parti dell'ipotenusa determinate dalla perpendicolare calata dal vertice dell'angolo retto.

PROPOSIZIONE XII. — *Teorema.*

In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, più due volte il prodotto di uno di questi due lati pel suo prolungamento compreso tra l'angolo ottuso e la perpendicolare calata dall'angolo opposto (fig. 68).

Fig. 68.

Dimostrazione. Sia BAC un triangolo ottusangolo in A; si prolunghi il lato BA, e dall'angolo opposto C si abbassi la perpendicolare CD: ciò posto, il triangolo rettangolo BDC dà $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$; ed il triangolo ADC dà $\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$; sostituendo questo valore di $\overline{CD}^2$ nell'equazione precedente, si conchiude

$$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2-\overline{AD}^2;$$

ma $BD=BA+AD$; dunque (prop. 9) si ha

$$\overline{BD}^2=\overline{BA}^2+2BA\times AD+\overline{AD}^2;$$

sostituendo questo valore di $\overline{BD}^2$ nella precedente, risulterà

$$\overline{BC}^2=\overline{BA}^2+2BA\times AD+\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-\overline{AD}^2;$$

e riducendo, si avrà

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + 2BA \times AD,$$

ciò che dimostra l'enunciato della proposizione.

PROPOSIZIONE XIII. — *Teorema.*

In qualunque triangolo ABC (fig. 69) *il quadrato di un lato* AB *opposto ad un angolo acuto* C *è eguale alla somma de' quadrati degli altri due lati, meno due volte il prodotto di uno di questi lati* AC, *per es.; pel suo segmento* DC *compreso tra l'angolo acuto* C *e la perpendicolare* BD *abbassata dall'angolo opposto.*

Fig. 69.

Dimostrazione. I due triangoli rettangoli ABD, BDC danno rispettivamente $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, e $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2$.

Sostituendo questo valore di $\overline{BD}^2$ in quello di $\overline{AB}^2$, si otterrà

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2.$$

Ma essendo $AD = AC - DC$, risulterà (prop. 10)

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - 2AC \times DC + \overline{DC}^2;$$

e mettendo questo valore di $\overline{AD}^2$ nella precedente espressione di $\overline{AB}^2$, si avrà

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - 2AC \times DC + \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2,$$

che si riduce ad

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times DC;$$

conformemente all'enunciato della proposizione.

La proposizione sussiste egualmente quando la perpendicolare BD cade fuori del triangolo (fig. 70). Infatti invece di $AD = AC - DC$ si ha allora $AD = DC - AC$; ma i valori di $\overline{AD}^2$ e di $\overline{AB}^2$ rimangono i medesimi di prima.

Fig. 70.

Corollario. Un triangolo sarà rettangolo, ottusangolo o acutangolo, secondo che il quadrato del lato maggiore è eguale, maggiore, o minore della somma dei quadrati degli altri due lati.

Proposizione XIV. — *Teorema.*

In ogni triangolo ABC *la somma de' quadrati dei due lati* AB, AC *è eguale a due volte il quadrato della mezza base* BE,

più due volte il quadrato della retta AE, *che unisce il vertice* A *col mezzo* E *della base* BC (fig. 71).

Fig. 71.

Dimostrazione. Dal vertice A si abbassi la perpendicolare AD sulla base BC: nel triangolo ABE ottusangolo in E, si avrà (prop. 12)

$$\overline{AB}^2=\overline{BE}^2+\overline{AE}^2+2BE\times ED;$$

e nel triangolo AEC (prop. 13) sarà

$$\overline{AC}^2=\overline{EC}^2+\overline{AE}^2-2EC\times ED.$$

Sommando insieme queste due equazioni, ed osservando che BE=EC, risulterà

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{BE}^2+2\overline{AE}^2.$$

Corollario. In ogni parallelogrammo la somma dei quadrati dei lati è eguale alla somma de' quadrati delle due diagonali (fig. 72), perchè nel triangolo ABD si ha

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2\overline{BO}^2+2\overline{AO}^2,$$

e nel triangolo BCD si ha

$$\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=2\overline{BO}^2+2\overline{OC}^2;$$

ed a cagione di $AO=OC$, sommando, sarà

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=4\overline{BO}^2+4\overline{AO}^2=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2,$$

Fig. 72.

giacchè il quadrato di una linea è eguale a quattro volte quello della sua metà.

Proposizione XV. — *Problema.*

Descrivere un parallelogrammo equivalente ad un triangolo dato ABC (fig. 73).

Fig. 73.

Risoluzione. Dividasi per mezzo l'altezza AD del triangolo in H, e tirisi pel punto H la FG parallela a BC, e pel punto C tirisi CG parallela a BA; la figura BCGF sarà un parallelo-

grammo equivalente al triangolo ABC; perchè ha la stessa misura del triangolo, cioè BC × HD.

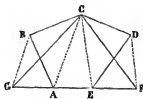
Il parallelogrammo ABOM fatto sulla metà della base BC coll'altezza AD, è anche equivalente al triangolo ABC, perchè ha la stessa misura del triangolo, cioè BO × AD.

Qualsivoglia parallelogrammo avente per base BC e per altezza HD, oppure la base BO e l'altezza AD, risolve egualmente il problema.

Oltre a queste soluzioni il problema ne ammette ancora infinite altre, nelle quali il parallelogrammo non ha comune col triangolo dato, nè la base nè l'altezza.

Proposizione XVI. — *Problema.*

Trasformare un poligono in un altro equivalente, che abbia un lato di meno (fig. 74).

Fig. 74.

Risoluzione. Sia ABCDE il poligono dato: si tiri la diagonale CE, che separi il triangolo CDE; dal punto D conducasi DF parallela a CE finchè incontri il lato AE prolungato in F; tirisi quindi la CF; il poligono dato ABCDE sarà equivalente al poligono ABCF, che ha un lato di meno.

Infatti i due triangoli CDE, CFE avendo la stessa base CE, e la stessa altezza a cagione delle parallele CE, DF, sono equi-

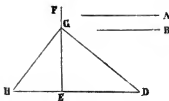
valenti; dunque sostituendo il triangolo CFE al triangolo CDE, risulterà il quadrilatero ABCF equivalente al pentagono ABCDE.

Nella stessa maniera, separando dal quadrilatero ABCF il triangolo CBA, e sostituendo in sua vece il triangolo equivalente CGA, risulterà il triangolo GCF equivalente al quadrilatero ABCF, e perciò anche equivalente al pentagono ABCDE.

Con la medesima costruzione ripetuta quanto basti, si potrà trasformare un poligono qualunque in un triangolo equivalente.

Proposizione XVII. — *Problema.*

Fare un quadrato equivalente alla somma, o alla differenza di due quadrati dati (fig. 75).

Fig. 75.

Risoluzione. Sieno A, B i lati dei due quadrati dati:

1° Volendo trovare un quadrato equivalente alla somma de' due dati, si faccia un angolo retto FED; prendasi ED=A, EG=B, e tirisi DG, questo sarà il lato del quadrato ricercato. Infatti il triangolo DEG essendo rettangolo in E, il quadrato fatto sopra DG è uguale alla somma de'quadrati fatti sopra ED ed EG, ossia fatti sopra A e B.

2° Volendo trovare un quadrato eguale alla differenza dei

quadrati dati, si faccia medesimamente un angolo retto FEH; si prenda EG eguale al lato minore B, e dal punto G come centro, con un raggio GH eguale al lato A si descriva un arco che tagli EH in H; il quadrato fatto sopra EH sarà eguale alla differenza dei quadrati fatti sopra A e B.

Infatti il triangolo GEH, essendo rettangolo in E, il quadrato del cateto EH è uguale al quadrato dell'ipotenusa GH=A, meno il quadrato dell'altro cateto EG=B.

Scolio. Ripetendo la stessa costruzione si potrà formare un quadrato eguale alla somma di un numero qualsivoglia di quadrati dati; oppure un quadrato doppio, triplo, quadruplo, ecc. di un altro quadrato dato.

Si noti ancora, che per fare un quadrato che sia la metà di un altro quadrato dato, si dovrà prendere per lato la metà della diagonale del quadrato dato.

Proposizione XVIII. — *Problema.*

Esprimere con due linee la ragione *di due quadrati dati.*

Risoluzione. Sieno (fig. 75) HG, GD i lati de'due quadrati dati; si dispongano questi lati ad angolo retto HGD, si tiri l'ipotenusa HD, e dall'angolo retto G si abbassi la perpendicolare GE sull'ipotenusa; la *ragione* de'due quadrati dati sarà eguale a quella delle due rette HE, ED; perchè (prop. 11, coroll. 2) si ha

$$\overline{HG}^2 : \overline{GD}^2 :: HE : ED.$$

Scolio. Cercando la comune misura delle due rette HE, ED, e valutandole numericamente, si potrà anche esprimere con due numeri la *ragione* dei due quadrati dati, o esattamente, o per *approssimazione*, secondo che le due rette HE, ED avranno o non avranno una comune misura.

Problemi da risolversi.

Ecco gli enunciati di alcune questioni, che gli allievi potranno esercitarsi a risolvere numericamente:

1° *Trovare il lato e l'area di un quadrato, la cui diagonale è di 20 trabucchi.*

Risposta: l'area sarà di $200^{tr.\,q}$, ed il lato di $14^{tr.}\ 0^{p.}\ 10^{on.}\ 3^{p.}$ circa.

2° *L'area di un rettangolo è di 800 trabucchi quadrati (due giornate), e l'eccesso della sua base sopra la sua altezza è di 7 trabucchi. Trovare i valori numerici di queste due linee.*

Risposta: 32 trab. e 25 trab.

3° *L'area di un trapezio è di 1315 trabucchi quadrati (3 giornate, 28 tavole, 9 piedi); e le sue basi parallele sono di 21 trabucchi e 13 trabucchi; quale sarà la sua altezza?*

Risposta: $77^{tr.}\ 2^{p.}\ 1^{on.}\ 5^{p.}$ prossimamente.

4° *L'area di un triangolo equilatero è di 389 metri q., 71. Trovare il suo lato.*

Risposta: 30 metri prossimamente.

Si noti a questo riguardo, che il lato del triangolo equilatero essendo $=a$, la sua altezza sarà $=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, e per conseguenza la sua area sarà espressa da $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$;

onde $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}=389,71$; e da questa equazione si caverà il valore di a secondo le note regole.

5° *La somma dei tre lati di un triangolo rettangolo è*

156 *metri, e la sua superficie è eguale a* 1014 *metri quadrati; determinare ciascuno de' suoi lati.*

Risposta: 39^m, 52^m, 65^m.

6° *Dati i tre lati di un triangolo, trovarne l'area.*

Risoluzione. Sia nel triangolo ABC (fig. 76) il lato $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$: dal teorema della prop. 13, si ha

$$c^2=a^2+b^2-2a.DC,$$

onde risulta

$$DC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a},$$

Fig. 76.

e col mezzo di questo valore di DC il triangolo rettangolo ADC darà l'altezza

$$AD=\sqrt{b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2}$$

che si trasforma in

$$AD=\frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{2a},$$

moltiplicando da ambe le parti per la metà della base, cioè per $\frac{a}{2}$, risulterà l'area del triangolo ABC; e sarà

$$\text{Area ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}.$$

La quantità sotto il radicale essendo la differenza di due quadrati si può trasformare nel modo seguente; e si avrà

$$\text{Area ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)};$$

facendo $a+b+c=2S$,

S sarà visibilmente la semi-somma dei lati del triangolo, e si avrà

$$b+c-a=2(S-a)$$

$$a+c-b=2(S-b)$$

$$a+b-c=2(S-c),$$

onde risulta

$$\text{Area ABC} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}.$$

Dunque l'area di un triangolo è eguale alla radice quadrata del prodotto di quattro fattori, de' quali il primo è la semi-somma

dei tre lati del triangolo, e gli altri sono le tre differenze tra questa semi-somma e ciascuno dei lati.

Per applicazione facciasi $a=25^m$, $b=20^m$, $c=15^m$, si troverà

$$\text{Area ABC}=\sqrt{30.(30-25)(30-20)(30-15)}=150^{mq};$$

il che si può facilmente verificare; giacchè in questo caso particolare il triangolo è rettangolo, e la sua area è eguale al prodotto di un cateto per la metà dell'altro. Si ha dunque come sopra

$$\text{Area ABC}=\frac{20\times15}{2}=150^{mq}.$$

LIBRO TERZO.

Linee proporzionali e figure simili.

Definizioni.

Poligoni simili sono quelli che hanno gli angoli rispettivamente eguali ciascuno a ciascuno, ed i lati adiacenti ad angoli eguali proporzionali tra loro.

Così tutti i triangoli equilateri sono figure simili; e tutti i quadrati sono parimente simili.

Nelle figure simili i lati, che hanno la medesima posizione nelle due figure, cioè che sono adiacenti ad angoli rispettivamente eguali, chiamansi *lati omologhi;* perchè presi due a due formano *ragioni* eguali tra loro.

Proposizione I. — *Teorema.*

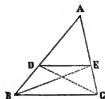
Una retta DE, *tirata in un triangolo* ABC (fig. 77) *parallelamente ad un lato* BC, *divide gli altri due lati* AB, AC *in parti proporzionali, di modo che si avrà*

BD:DA::CE:EA.

Dimostrazione. Si tirino le rette BE, CD: i due triangoli BDE, CDE posti sulla stessa base DE, e tra le stesse parallele

DE, BC, saranno equivalenti, ed avranno perciò la stessa *ragione* col terzo triangolo DAE; dunque sarà

BDE:DAE::CDE:DAE

Fig. 77.

Ma i due triangoli BDE, DAE, essendo posti sopra una stessa retta BA, col vertice comune in E, hanno la stessa altezza, e stanno perciò fra loro come le loro basi BD, DA; dunque sarà

BDE:DAE::BD:DA.

Similmente sarà

CDE:DAE::CE:EA.

Le prime *ragioni* di queste due proporzioni essendo eguali fra loro, le seconde saranno anche eguali; dunque sarà

BD:DA::CE:EA.

Corollario 1°. Da questa proporzione *componendo* risulta

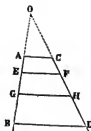
$$BD+DA:DA::CE+EA:EA,$$

ossia $$AB:AD::AC:AE,$$

e così anche $$AB:BD::AC:CE.$$

Corollario 2°. Due rette AB, CD (fig. 78) sono tagliate in parti proporzionali da un numero qualsivoglia di parallele AC, EF, GH, ecc., di modo che si avrà

$$AE:CF::EG:FH::GB:HD::, \text{ecc.}$$

Fig. 78.

Infatti se le rette AB, CD sono parallele, la proposizione è manifesta, essendo allora

$$AE=CF, EG=FH, \text{ecc.}$$

Se poi le rette AB, CD non sono parallele, esse s'incontreranno in un qualche punto O, e nel triangolo OEF essendo AC parallela ad EF, si avrà $OE:AE::OF:CF$ (coroll. ant.); e nel triangolo OGH si avrà pure $OE:EG::OF:FH$ (prop. ant.); queste due proporzioni avendo gli stessi antecedenti, i loro conseguenti saranno proporzionali, e daranno

AE:CF::EG:FH.

Si dimostra medesimamente che

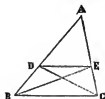
EG:FH::GB:HD,

e così di seguito.

Scolio. È chiaro, che se le parti AE, EG, GB fossero eguali fra loro, le parti CF, FH, HD sarebbero anche eguali.

Proposizione II. — *Teorema.*

Inversamente: *se una retta* DE *divide due lati* AB, AC *di un triangolo* ABC *in parti proporzionali, essa sarà parallela al terzo lato* BC (fig. 79).

Fig. 79.

Dimostrazione. Posta la proporzione BD:DA::CE:EA, tirando le rette BE, CD ed osservando che la ragione BD:DA è eguale a quella de' triangoli BDE:DAE, e che la ragione CE:EA è parimente eguale a quella dei triangoli CDE:DAE, si ricaverà quest'altra proporzione

BDE:DAE::CDE:DAE.

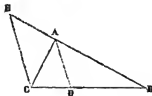
Ora i due triangoli BDE, CDE avendo la stessa ragione

col terzo DAE, saranno equivalenti; ed avendo di più la stessa base DE, avranno di necessità la stessa altezza, ossia saranno posti tra due parallele: dunque DE sarà parallela al lato BC.

PROPOSIZIONE III. — *Teorema.*

La retta AD (fig. 80) *che divide in due parti eguali l'angolo* BAC *di un triangolo, dividerà il lato opposto* BC *in due parti proporzionali ai lati adiacenti: di modo che sarà*

BD:DC::BA:AC.

Fig. 80.

Dimostrazione. Pel punto C tirisi CE parallela a DA, e prolunghisi BA in E: nel triangolo BCE la retta DA essendo parallela al lato CE, si ha la proporzione

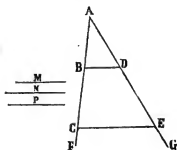
BD:DC::BA:AE (prop. 1):

Ma il triangolo ACE è isoscele; perchè a cagione delle parallele AD, CE l'angolo ACE=DAC, e l'angolo CEA=DAB, e per ipotesi l'angolo DAC=DAB; dunque sarà l'angolo ACE=CEA, e per conseguenza il lato AE=AC; dunque sostituendo AC in vece di AE nella proporzione precedente, risulterà

BD:DC::BA:AC.

Proposizione IV. — *Problema.*

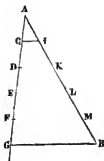
Trovare una quarta proporzionale a tre rette date M, N, P (fig. 81).

Fig. 81.

Risoluzione. Si tirinò due rette indefinite AF, AG che facciano un angolo qualunque: sopra AF si prendano AB=M e BC=N; sopra AG si prenda AD=P; si tiri la BD, e pel punto C conducasi la CE parallela a BD; DE sarà la quarta proporzionale ricercata; perchè nel triangolo ACE la retta BD essendo parallela al lato CE, sarà AB:BC::AD:DE; ossia M:N::P:DE.

Corollario. Nella costruzione precedente, prendendo AD=BC=N, la DE sarà terza proporzionale dopo M ed N, poichè si avrà M:N::N:DE.

Proposizione V. — *Problema.*

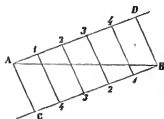
Dividere una retta data AB (fig. 82) *in qualsivoglia numero di parti eguali, per es. in cinque.*

Fig. 82.

Risoluzione. Dall'estremità A tirisi una retta indefinita AG, e presa ad arbitrio una parte AC, si porti sopra AG cinque volte di seguito da A in G; tirisi la retta GB, e conducasi quindi la CI parallela alla GB; dico che AI sarà la quinta parte della retta AB; perchè essendo la CI parallela alla GB, si ha AC:AG::AI:AB: ma AC è per costruzione la quinta parte di AG; dunque AI sarà pure la quinta parte di AB. Epperò portando col compasso successivamente AI sopra AB, si dividerà questa retta in cinque parti eguali.

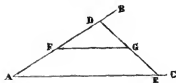
Invece di portare la parte AI sulla AB; se dai punti di divisione C, D, E, F si tirano tante parallele alla GB, queste divideranno la AB in cinque parti eguali.

Per facilitare questa soluzione si fa uso del metodo se-

güente: sia AB (fig. 83) la linea da dividersi in parti eguali: dall'estremità A tirisi comunque la retta indefinita AD, e dall'altra estremità B conducasi la indefinita BC parallela ad AD; sopra ciascuna delle parallele AD, BC si porti lo stesso numero di parti eguali, cominciando da A nella prima, e da B nella seconda; uniscansi i punti di divisione per ordine colle rette AC, (1) (4), (2) (3), ... ecc.; queste rette saranno tutte parallele fra loro, e divideranno la retta AB in tante parti eguali, quante sono le parti prese sopra AD o BC.

Fig. 83.

PROPOSIZIONE VI. — *Problema.*

Per un punto G (fig. 84) *dato in un angolo* BAC, *condurre una retta* DE *di modo che le parti* GD, GE *comprese tra il punto dato* G *ed i lati dell'angolo sieno eguali.*

Fig. 84.

Risoluzione. Tirisi GF parallela al lato AC, prendasi

FD=AF, e pei punti D, G conducasi la retta DGE, questa sarà la retta dimandata; perchè essendo FG parallela ad AE, si avrà

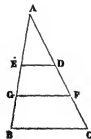
$$AF:FD::EG:GD;$$

dunque a cagione di AF=FD, sarà pure EG=GD.

Scolio. Il problema non sarebbe punto più difficile, se le parti EG, GD dovessero stare tra loro in qualsivoglia altra ragione: infatti basterebbe allora prendere FD in modo che la ragione di AF alla FD fosse eguale alla ragione data delle parti EG, GD.

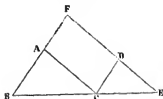
Proposizione VII. — *Problema.*

Dividere una retta data AB (fig. 85) *nella stessa proporzione in cui è divisa un'altra retta data* AC *nei punti* D, F.

Fig. 85.

Risoluzione. Si disponga la retta AB in modo che formi qualsivoglia angolo colla retta divisa AC; tirisi BC, e dai punti D, F conducansi DE, FG parallele a BC; queste divideranno la retta AB in parti proporzionali alle parti di AC; perchè a cagione delle parallele si ha AE:EG::AD:DF, ed EG:GB::DF:FC.

PROPOSIZIONE VIII. — *Teorema.*

Due triangoli ABC, CDE (fig. 86) *equiangoli tra loro, hanno i lati omologhi proporzionali, e sono simili.*

Fig. 86.

Dimostrazione. Sia l'angolo BAC=CDE, l'angolo ABC=DCE, e l'angolo ACB=DEC, dico che sarà

BC:CE::AB:D:C::AC:DE.

Dispongasi i lati BC, CE in linea retta, e si prolunghino i lati BA, ED fin che s'incontrino in F; l'angolo ACB essendo eguale a DEC, la retta AC sarà parallela ad FE; similmente l'angolo ABC essendo eguale a DCE, la retta CD sarà parallela a BF; dunque la figura ACDF è un parallelogrammo.

Ora nel triangolo BFE a cagione di AC parallela al lato FE, si avrà

BC:CE::BA:AF=CD

e nello stesso triangolo BFE a cagione di CD parallela al lato BF, si avrà

BC:CE::FD ossia AC:DE;

queste due proporzioni avendo comune la ragione BC:CE, danno anche BA:CD::AC:DE; dunque sarà

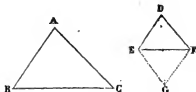
BC:CE::BA:CD::AC:DE.

Corollario. Due triangoli sono simili allorchè hanno solamente due angoli rispettivamente eguali.

Scolio. Nei triangoli simili, i lati omologhi sono opposti ad angoli eguali.

PROPOSIZIONE IX. — *Teorema.*

Due triangoli ABC, DEF *che hanno i lati proporzionali, sono equiangoli tra loro, e perciò simili* (fig. 87).

Fig. 87.

Dimostrazione. Sia BC:EF::AB:DE::AC:DF; dico che sarà l'angolo A=D, B=E, C=F.

Si formi nel punto E l'angolo FEG=B, e nel punto F si formi l'angolo EFG=C; il terzo angolo G sarà eguale al terzo A, ed i due triangoli ABC, GEF saranno equiangoli; dunque (prop. ant.) si avrà

BC:EF::AB:EG::AC:GF;

ma per ipotesi si ha

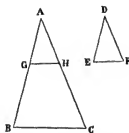
BC:EF::AB:DE::AC:DF;

queste due proporzioni avendo la prima ragione comune, e gli antecedenti eguali, daranno EG=DE, e GF=DF; dunque i due triangoli EGF, DEF sono eguali tra loro; ma EGF per costruzione è equiangolo con ABC; dunque anche DEF sarà equiangolo e simile ad ABC.

Scolio. La definizione dei poligoni simili racchiude due condizioni; ma pe' triangoli basta una condizione sola: poichè in queste figure la proporzionalità de' lati è conseguenza necessaria della eguaglianza degli angoli, e *viceversa*; la qual cosa più non ha luogo quando i lati sono più di tre: infatti nei quadrilateri, per esempio, si può alterare la proporzione dei lati senza cangiare gli angoli, e si possono cangiare gli angoli senza alterare i lati. Onde nei quadrilateri e nelle figure di un maggior numero di lati, sono, per la loro similitudine, generalmente necessarie le due condizioni date nella definizione.

Proposizione X. — *Teorema.*

Due triangoli, che hanno un angolo eguale compreso tra lati proporzionali, sono simili (fig. 88).

Fig. 88.

Dimostrazione. Sia l'angolo A=D, e sia di più AB:DE::AC:DF;

il triangolo ABC sarà simile a DEF. Prendasi AG=DE, AH=DF, e tirisi GH; il triangolo AGH sarà eguale a DEF; epperò sarà

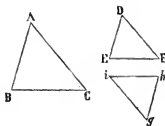
$$AB:AG::AC:AH;$$

dunque (prop. 2) GH è parallela a BC; epperò sarà l'angolo AGH=B, e l'angolo AHG=C, ed il triangolo AGH sarà simile al triangolo ABC; dunque DEF, che è eguale ad AGH, sarà anche simile ad ABC.

Corollario. In qualsivoglia triangolo ABC la retta GH parallela al lato BC, separa il triangolo AGH simile ad ABC.

Proposizione XI. — *Teorema.*

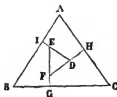
Due triangoli sono simili, allorchè hanno i lati rispettivamente paralleli (fig. 89).

Fig. 89.

Dimostrazione. Sia AB parallelo a DE, AC parallelo a DF, e BC parallelo ad EF; sarà l'angolo A=D, B=E, C=F; perchè questi angoli hanno due a due i lati paralleli e l'apertura volta dalla stessa parte; e se il lato AB è parallelo a gh, AC parallelo a gi, e BC parallelo ad ih, allora sarà l'angolo A=g, B=h, e

C=*i;* perchè questi angoli hanno due a due i lati paralleli, e l'apertura volta in parti contrarie; dunque ecc.

Proposizione XII. — *Teorema.*

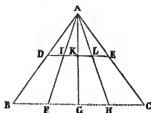
Due triangoli ABC, DEF (fig. 90) *che hanno i loro lati rispettivamente perpendicolari ciascuno a ciascuno, sono equiangoli, epperciò simili.*

Fig. 90.

Dimostrazione. Sia il lato DE perpendicolare ad AB, FD ad AC, ed EF a BC: gli angoli in I, H, G saranno retti; dunque nel quadrilatero AIDH la somma A+EDH eguaglia due retti; ma la somma EDF+EDH fa pure due retti; dunque sarà l'angolo A=EDF. Nella stessa maniera si dimostra che l'angolo B=DEF, e l'angolo C=DFE. Dunque i triangoli che hanno i lati perpendicolari sono equiangoli, epperciò simili.

Scolio. Se il triangolo DEF fosse posto fuori del triangolo ABC, la loro similitudine sussisterebbe egualmente; poichè se i lati di un triangolo esterno sono rispettivamente perpendicolari ai lati di ABC, essi saranno rispettivamente paralleli a quelli del triangolo DEF; epperò il triangolo esterno sarà simile a DEF, ed anche simile ad ABC.

Proposizione XIII. — *Teorema.*

Due rette parallele BC, DE (fig. 91) *sono tagliate in parti proporzionali da un numero qualunque di rette* AB, AF, AG, AH *tirate da uno stesso punto* A.

Fig. 91.

Dimostrazione. I triangoli simili ABF, ADI danno

$$AF:AI::BF:DI;$$

similmente i triangoli simili AFG, AIK danno

$$AF:AI::FG:IK;$$

dunque per essere la ragione AF:AI comune ad entrambe le proporzioni, risulterà

$$BF:DI::FG:IK.$$

Si dimostra medesimamente che sarà

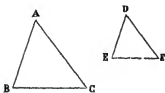
$$FG:IK::GH:KL \text{ ecc.}$$

Corollario. Se la retta BC fosse divisa in parti eguali nei

punti F, G, H, la sua parallela DE sarebbe anche divisa in parti eguali nei punti I, K, L. Quindi deriva un altro metodo facile per dividere una data retta in un numero qualunque di parti eguali.

Proposizione XIV. — *Problema.*

Sopra una retta data EF (fig. 92) *costruire un triangolo simile ad un triangolo dato* ABC.

Fig. 92.

Risoluzione. Ciascuna delle condizioni che assicurano la similitudine di due triangoli può servire alla soluzione di questo problema: quindi si deducono i tre metodi seguenti:

1°. Si formino in E, F gli angoli FED=B, ed EFD=C; il triangolo DEF sarà simile al triangolo ABC (prop. 8 coroll.).

2°. Si faccia in E l'angolo FED=B, e si prenda la lunghezza del lato ED quarta proporzionale alle tre rette BC, EF, AB: i due triangoli saranno simili, perchè avranno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali.

3°. Si cerchi una quarta proporzionale alle tre rette BC, EF, AB, ed un'altra alle tre rette BC, EF, AC, e con queste due rette si formi sopra EF un triangolo DEF, questo sarà simile ad ABC (prop. 9).

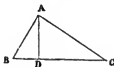
PROPOSIZIONE XV. — *Teorema.*

Se dall' angolo retto A *di un triangolo rettangolo* ABC (fig. 93) *si abbassa una perpendicolare* AD *sopra l'ipotenusa:*

1° *La perpendicolare* AD *divide il triangolo* ABC *in due altri triangoli rettangoli* ABD, ADC *simili al primo, e per conseguenza simili tra di loro.*

2° *Ciascun cateto* AB *o* AC *è medio proporzionale fra l'ipotenusa* BC *ed il segmento adiacente* BD *o* DC.

3° *La perpendicolare* AD *è media proporzionale fra i due segmenti* BD, DC *dell'ipotenusa.*

Fig. 93.

Dimostrazione. 1° I due triangoli BAC e BDA avendo un angolo comune B, e l'angolo retto BAC=BDA, sono simili; per la stessa ragione il triangolo BAC è simile al triangolo ADC; dunque i tre triangoli BAC, BDA, ADC sono equiangoli, e simili fra loro.

2° I due triangoli BAC e BDA essendo simili, hanno i loro lati omologhi proporzionali; dunque si avrà

$$BC:AB::AB:BD;$$

similmente i due triangoli BAC, ADC danno

$$BC:AC::AC:DC;$$

dunque ciascun cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa ed il segmento adiacente.

3° Paragonando i lati omologhi dei triangoli simili BDA, ADC, si avrà

$$BD:AD::AD:DC;$$

dunque la perpendicolare AD è media proporzionale fra i due segmenti dell'ipotenusa.

Scolio. Dalle due proporzioni della seconda parte del teorema precedente, si ricava

$$BD=\frac{\overline{AB}^2}{BC}, \text{ e } DC=\frac{\overline{AC}^2}{BC};$$

sommando insieme queste due equazioni, si avrà

$$BD+DC, \text{ ossia } BC=\frac{AB^2+AC^2}{BC},$$

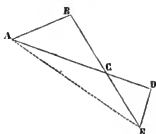
e moltiplicando da ambe le parti per BC, risulterà

$$BC^2=AB^2+AC^2;$$

cioè il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati de'due cateti, il che è già stato altramente dimostrato.

Proposizione XVI. — *Teorema.*

Due triangoli, che hanno un angolo eguale, stanno fra loro come i prodotti dei lati, che contengono l'angolo eguale (fig. 94).

Fig. 94.

Dimostrazione. Nei due triangoli ABC, CDE sia l'angolo ACB=DCE; si dispongano i triangoli in modo, che gli angoli eguali sieno opposti al vertice, e si tiri la retta AE; i due triangoli ABC, ACE avendo il vertice comune in A, hanno la stessa altezza, e stanno fra loro come le loro basi BC, CE; dunque sarà

$$ABC:ACE::BC:CE.$$

Similmente sarà

$$ACE:CDE::AC:CD.$$

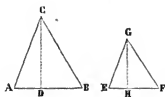
Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, ed ommettendo il fattore comune ACE, risulterà

$$ABC:CDE::AC\times BC:CD\times CE.$$

Corollario. Se i due triangoli ABC, CDE fossero equivalenti, allora sarebbe $AC \times BC = CD \times CE$, ossia $AC:CD::CE:BC$; dunque se due triangoli sono equivalenti ed hanno un angolo eguale, i lati che contengono quest'angolo sono fra loro inversamente proporzionali.

PROPOSIZIONE XVII. — *Teorema.*

Due triangoli simili ABC, EFG *stanno fra loro come i quadrati dei loro lati omologhi* (fig. 95).

Fig. 95.

Dimostrazione. Abbassando le perpendicolari CD, GH sui lati omologhi AB, EF si avranno manifestamente le due proporzioni

$$AB:EF::AC:EG,$$

$$CD:GH::AC:EG;$$

moltiplicandole per ordine, e dividendo i termini della prima ragione per 2, si avrà

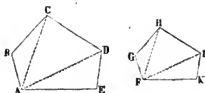
$$\frac{AB \times CD}{2} : \frac{EF \times GH}{2} :: \overline{AC}^2 : \overline{EG}^2.$$

Ma i due primi termini di questa proporzione esprimono le rispettive aree dei triangoli ABC, EFG; dunque sarà

$$ABC:EFG::AC^2:EG^2::, \text{ ecc.}$$

Proposizione XVIII. — *Teorema.*

Due poligoni simili ABCDE, FGHIK *sono composti di un egual numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno e similmente disposti* (fig. 96).

Fig. 96.

Dimostrazione. Da due angoli eguali A, F tirinsi ne'due poligoni le diagonali agli altri angoli; risulterà da una parte e dall'altra un egual numero di triangoli medesimamente disposti; di più il triangolo ABC è simile al triangolo FGH, perchè l'angolo B=G, ed i lati AB, BC sono proporzionali ai lati FG, GH per cagione della similitudine dei poligoni; dunque sarà l'angolo BCA=GHF, e per conseguenza l'angolo ACD=FHI: ma si ha

$$BC:GH::CA:HF \text{ e } BC:GH::CD:HI;$$

dunque sarà anche CA:HF::CD:HI; epperò i triangoli ACD, FHI avendo un angolo eguale compreso fra lati proporzionali, saranno simili. Si dimostrerà medesimamente la similitudine

degli altri triangoli, qualunque sia il numero dei lati dei poligoni proposti.

Scolio. La proposizione inversa è egualmente vera: cioè *due poligoni sono simili, quando sono composti di un egual numero di triangoli simili, e similmente disposti.*

Infatti dalla similitudine dei triangoli similmente posti si deduce facilmente l'eguaglianza degli angoli, cioè B=G, C=H, D=I, ecc., e la proporzionalità de'lati, cioè

AB:FG::BC:GH::CD:HI::, ecc.;

e così i due poligoni avendo gli angoli rispettivamente eguali, ed i lati proporzionali, saranno simili.

Proposizione XIX. — *Problema.*

Sul lato FK, *omologo ad* AE, *costruire un poligono simile al poligono* ABCDE *dato* (fig. 96).

Risoluzione. Nel poligono dato si tirino da uno stesso angolo le diagonali AC, AD; si formi nel punto F l'angolo KFI=EAD, e nel punto K si formi l'angolo FKI=AED; le rette FI, KI s'incontreranno in I, e FKI sarà un triangolo simile ad AED; medesimamente sopra FI omologa con AD si formi il triangolo FIH simile ad ADC, e sopra FH omologa con AC si formi il triangolo FHG simile ad ACB: il poligono risultante FGHIK sarà simile al poligono dato ABCDE, perchè questi due poligoni saranno composti di uno stesso numero di triangoli simili, e similmente disposti.

Proposizione XX. — *Teorema.*

I perimetri dei poligoni simili stanno come i lati omologhi; e le loro aree come i quadrati dei lati medesimi (fig. 96).

Dimostrazione. 1° Dalla serie di ragioni eguali

$$AB:FG::BC:GH::CD:HI::DE:IK::EA:KF,$$

si ricava la somma degli antecedenti AB+BC+CD+DE+EA, ossia il perimetro della prima figura sta alla somma dei conseguenti FG+GH+HI+IK+KF, ossia al perimetro della seconda, come un antecedente qualunque stà al suo conseguente, ossia come un lato AB sta al suo omologo FG.

2° I triangoli ABC, ACD, ADE essendo rispettivamente simili ai triangoli FGH, FHI, FIK, si avranno (prop. 17) le seguenti proporzioni:

$$ABC:FGH::\overline{BC}^2:\overline{GH}^2,$$

$$ACD:FHI::\overline{CD}^2:\overline{HI}^2,$$

$$ADE:FIK::\overline{DE}^2:\overline{IK}^2;$$

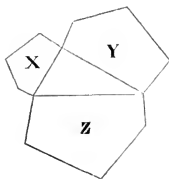
ma per cagione della proporzionalità dei lati dei due poligoni, le seconde ragioni di tutte queste proporzioni sono eguali fra loro; dunque saranno anche eguali le prime; epperò la somma degli antecedenti ABC+ACD+ADE, ossia il primo poligono starà alla somma dei conseguenti FGH+FHI+FIK ossia al secondo poligono, come un antecedente qualunque ABC sta al suo conseguente FGH, ossia come $\overline{BC}^2$ sta al $\overline{GH}^2$. Dunque le aree dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Corollario. Se sopra i tre lati di un triangolo rettangolo ABC (fig. 97) presi come lati omologhi, si costruiscono tre figure simili X, Y, Z, la figura Z fatta sopra l'ipotenusa sarà eguale alla somma delle altre due X, Y fatte sopra i cateti; infatti queste tre

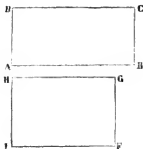
figure sono proporzionali ai quadrati dei loro lati omologhi, cioè sarà

$$Z:X:Y::\overline{BC}^2:\overline{AB}^2:\overline{AC}^2;$$

ma $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$; dunque $Z=X+Y$.

Fig. 97.

Problemi relativi al Libro III.

I. *Sopra una retta data* EF *fare un rettangolo* EFGH *equivalente ad un rettangolo dato* ABCD (fig. 98).

Fig. 98.

Risoluzione. Si trovi una quarta proporzionale alle tre rette EF, AB, AD, e sia EH questa quarta proporzionale; il rettangolo costrutto coi lati EF, EH sarà equivalente al rettangolo dato ABCD; poichè in virtù della proporzione EF:AB::AD:EH, sarà EF × EH = AB × AD.

Per formare sopra una retta data un rettangolo equivalente ad un triangolo dato, si cerchi una quarta proporzionale dopo la retta data, la base del triangolo e la metà della sua altezza: la retta così trovata sarà l'altezza del rettangolo domandato.

II. *Esprimere con due linee la ragione di un rettangolo* A × B *ad un altro rettangolo* C × D.

Risoluzione. Si cerchi una quarta proporzionale X alle tre rette B, C, D; dico che la ragione delle due linee A e X sarà eguale a quella dei due rettangoli $A \times B$ e $C \times D$.

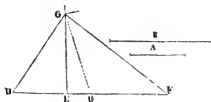
Infatti la proporzione $B : C :: D : X$ dà $C \times D = B \times X$; dunque si avrà

$$A \times B : C \times D :: A \times B : B \times X :: A : X.$$

Corollario. Dunque per avere in linee la ragione di due quadrati A^2 e B^2, si cerchi una terza proporzionale X ai lati A e B dei due quadrati, e si avrà

$$A^2 : B^2 :: A^2 : A . X :: A : X.$$

III. *Trovare una media proporzionale tra due rette date* A, B (fig. 99).

Fig. 99.

Risoluzione. Sopra una retta indefinita DF si prenda DE=A, ed EF=B; dal punto E si alzi una perpendicolare indefinita EG, e dal punto O preso sul mezzo di DF, col raggio OG=OD=OF seghisi la perpendicolare in G; EG sarà la media proporzionale ricercata. Perchè il triangolo DGF essendo rettangolo in G (prop. 29, lib. 1°), si avrà $DE : EG :: EG : EF$ (prop. 15, lib. 3°), ossia $A : EG :: EG : B$. Quindi risulta $A \times B = \overline{EG}^2$; cioè il rettangolo di due rette è equivalente al quadrato fatto sulla loro media proporzionale.

IV. *Costruire un quadrato equivalente ad un parallelogrammo, ad un triangolo, ad un trapezio, o ad un poligono qualunque dato.*

Risoluzione. 1° Si cerchi una media proporzionale tra la base e l'altezza del parallelogrammo dato, questa media sarà il lato del quadrato equivalente al parallelogrammo.

2° Il lato del quadrato equivalente al triangolo dato, sarà la media proporzionale tra la base del triangolo e la metà della sua altezza.

3° Il lato del quadrato equivalente al trapezio è la media proporzionale tra l'altezza del trapezio e la semi-somma delle due basi parallele.

4° Per formare un quadrato equivalente ad un poligono qualunque dato, si trasformi questo poligono in un triangolo equivalente (lib. 2°, prop. 16): la media proporzionale tra la base e la metà dell'altezza di questo triangolo sarà il lato del quadrato equivalente al triangolo medesimo ed al poligono proposto.

V. *Costruire geometricamente la radice quadrata di qualsivoglia numero dato* N.

Risoluzione. 1° Quando il numero dato N sarà eguale alla somma di due quadrati, onde sia $N=a^2+b^2$, si formerà un triangolo rettangolo, i cui cateti contengano tante volte l'unità lineare, quante sono le unità astratte contenute nei numeri a e b rispettivamente; l'ipotenusa di questo triangolo esprimerà il valore della radice del numero N. Così per esempio se si domandasse la radice quadrata nel n° 41, osservando che $41=25+16=5^2+4^2$, si costruirebbe un triangolo rettangolo coi cateti rispettivamente eguali a cinque ed a quattro unità lineari: l'ipotenusa di questo triangolo esprimerebbe la radice del proposto n. 41. Si costruirebbe medesimamente

$$\sqrt{13}=\sqrt{9+4}=\sqrt{3^2+2^2}.$$

2° Quando il numero dato N sarà la somma di tre qua-

drati, onde sia $N = a^2 + b^2 + c^2$, si costruirà un triangolo rettangolo coi cateti a e b, l'ipotenusa di questo triangolo sarà

$$M = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si costruirà poscia un secondo triangolo rettangolo che abbia per cateti la linea M e la linea c, e l'ipotenusa di questo secondo triangolo sarà

$$\sqrt{M^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{N}.$$

Se il numero dato N fosse eguale alla somma di quattro quadrati, si opererebbe nello stesso modo, costruendo successivamente tre triangoli rettangoli.

3° Quando il numero dato N sarà eguale al prodotto di due fattori, come $N = a.b$, la cercata radice sarà rappresentata dalla media geometrica tra due rette che contengano tante unità lineari quante sono le unità astratte dei numeri a, b rispettivamente: così per costruire $\sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3}$, si cercherà la media proporzionale tra due rette eguali l'una a due, l'altra a tre unità lineari.

4° Qualsivoglia numero essendo eguale al prodotto del numero stesso per l'unità, si costruirà la radice quadrata di qualsivoglia numero intero o frazionario cercando la media proporzionale tra l'unità lineare ed una retta che contenga tante unità o tante parti di unità lineare, quante sono nel numero proposto le unità o le parti di unità astratta. Così per costruire linearmente $\sqrt{7} = \sqrt{7 \times 1}$ si cercherà la media proporzionale tra l'unità lineare ed una retta che contenga sette di queste unità: e si costruirà $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3} \times 1}$ cercando la media proporzionale tra l'unità lineare ed i due terzi di questa unità.

VI. *Determinare una linea retta la quale sia eguale ad una*

retta data A *moltiplicata o divisa per la radice quadrata di un numero* m.

Questo problema si risolverà facilmente osservando che

$$A\sqrt{m}=\sqrt{mA^2}=\sqrt{mA\times A},$$

e che

$$\frac{A}{\sqrt{m}}=\sqrt{\frac{A^2}{m}}=\sqrt{\frac{A}{m}\times A};$$

onde basterà cercare una media proporzionale nel primo caso tra A e mA; e nel secondo tra A ed $\frac{A}{m}$.

VII. *Date due figure simili, costruirne una terza simile alle due date, ed equivalente alla loro somma, oppure alla loro differenza.*

Risoluzione. Sieno AE, FK (fig. 100) due lati omologhi delle figure date: 1° si formi un triangolo rettangolo che abbia

Fig. 100.

per cateti AE, FK, l'ipotenusa di questo triangolo sarà il lato omologo della figura equivalente alla somma delle due date; 2° si formi un triangolo rettangolo che abbia AE per ipotenusa,

ed FK per cateto, l'altro cateto sarà il lato omologo della figura equivalente alla differenza delle due date. Si costrurrà quindi la figura cercata secondo il metodo della prop. 19.

VIII. *Trovare in linee la ragione di due figure simili.*

Risoluzione. Con due lati omologhi presi per cateti si formi un triangolo rettangolo, e si abbassi dall'angolo retto una perpendicolare sull'ipotenusa; la ragione dei due segmenti dell'ipotenusa sarà eguale a quella delle due figure simili.

Scolio. Se le due figure date non sono simili, si trasformino entrambe in quadrati equivalenti, e si avranno così due figure simili, cioè due quadrati, sui lati de'quali si potrà operare come si è detto testè.

IX. *Costruire un poligono* Y *simile ad un poligono dato* X, *e che stia a questo nella ragione di due rette date* M, N, *o di due numeri dati* m, n (fig. 101).

Fig. 101.

Risoluzione. Sopra una retta indefinita AE prendansi le lunghezze EK, KA che stieno tra loro come le rette date M, N, oppure come i numeri dati *m*, *n*: si alzi in K la perpendicolare KB, e dal punto di mezzo di AE con raggio eguale alla metà della stessa AE si descriva un arco di circolo, il quale tagli in B la per-

pendicolare KB: si compia il triangolo rettangolo ABE, tirando le rette BA, BE; sopra BA prendasi BC eguale ad un lato bc del poligono dato X, e tirisi CD parallela ad AE; BD sarà il lato del poligono cercato Y, omologo al lato bc del poligono X; di modo che formando sopra BD un poligono simile al poligono X fatto sopra bc, si avrà

$$Y:X::\overline{BD}^2:\overline{bc}^2::\overline{BD}^2:\overline{BC}^2,$$

ma a cagione delle parallele CD, AE, si ha

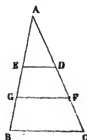
$$\overline{BD}^2:\overline{BC}^2::\overline{BE}^2:\overline{BA}^2::EK:KA::M:N;$$

dunque $Y:X::M:N$.

Se il lato bc del poligono X fosse maggiore di BA, si prolungherebbe BA, e si prenderebbe $BC'=bc$; BD' sarebbe in questo caso il lato del poligono cercato Y.

X. *Con una retta parallela alla base, dividere un triangolo in due parti, le cui aree stieno nella ragione di* m:n.

Sia ABC (fig. 102) il triangolo dato, si tratta di determinare

Fig. 102.

AG in modo, che tirando GF parallela a BC, si abbia

$$AGF:GBCF::m:n;$$

componendo questa proporzione, si avrà

$$ABC:AGF::m+n:m;$$

ma per la similitudine dei due triangoli ABC, AGF si avrà

$$ABC:AGF::\overline{AB}^2:\overline{AG}^2;$$

onde risulterà

$$m+n:m::\overline{AB}^2:\overline{AG}^2;$$

ossia

$$AG=\sqrt{\frac{m\overline{AB}^2}{m+n}}=\sqrt{AB\times\frac{mAB}{m+n}};$$

Si determinerà dunque il punto G pel quale dee condursi GF parallela a BC, prendendo AG eguale alla media proporzionale tra le due rette AB e $\frac{mAB}{m+n}$

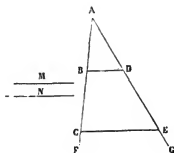
Nel caso di $m=n$, si avrebbe

$$AG=\sqrt{\frac{\overline{AB}^2}{2}}=\sqrt{AB\times\frac{1}{2}AB}:$$

prendendo dunque AG eguale alla media proporzionale tra AB ed $\frac{1}{2}$AB, il triangolo AGF sarebbe equivalente al trapezio GBCF.

XI. *Per un punto* B *dato sul lato* AC *di un triangolo* ACE (fig. 103) *condurre una retta* BD *che divida il triangolo in due parti, che stiano tra loro nella ragione di due numeri dati* m:n; *cioè che sia*

$$ABD:BCED::m:n.$$

Fig. 103.

È chiaro che il lato AD è l'incognita che si dee determinare; per questo si hanno due triangoli ABD ed ACE che hanno un angolo eguale in A, e danno perciò (prop. 16) la proporzione

$$ABD:ACE::AB\times AD:AC\times AE;$$

ma per ipotesi si ha

$$ABD:ACE::m:m+n;$$

onde risulterà

$$AB\times AD:AC\times AE::m:m+n,$$

ossia

$$(m+n)\ \mathrm{AB}\times\mathrm{AD}=m\mathrm{AC}\times\mathrm{AE},$$

e quindi

$$(m+n)\ \mathrm{AB}:m\mathrm{AC}::\mathrm{AE}:\mathrm{AD};$$

onde per soddisfare alla condizione del problema bisognerebbe prendere AD eguale alla quarta proporzionale dopo le tre rette $(m+n)$AB, mAC, ed AE.

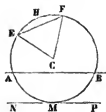
Se la ragione data $m:n$ fosse come $1:2$, allora AD sarebbe quarta proporzionale alle tre rette 3AB, AC, AE.

LIBRO QUARTO

Proprietà del circolo e delle linee rette in esso considerate: misura degli angoli.

Definizioni.

I. Chiamasi *segmento* di circolo la parte di un circolo compresa tra un arco EHF, oppure EMF (fig. 104) e la sua corda EF. La corda è la base del segmento. La medesima base appartiene sempre a due segmenti, la cui somma forma un circolo intiero.

Fig. 104.

II. Dicesi *Settore* la parte di un circolo compresa tra un arco EHF ed i due raggi CE, CF condotti alle due estremità

dell'arco medesimo. L'arco che termina il *settore* può essere minore o maggiore della mezza circonferenza, come vedesi in CEHF, ed in CEMF rispettivamente. Il semi-circolo è un settore terminato da un arco eguale alla semi-circonferenza.

III. *Segante* è una corda prolungata fuori della circonferenza che essa taglia in due punti, come AB (fig. 104).

IV. *Tangente* è una retta che ha un solo punto comune colla circonferenza, come NP. Il punto M comune alla retta ed alla circonferenza dicesi punto di *contatto.*

La tangente può considerarsi come una segante, i cui due punti d'intersezione colla circonferenza si riuniscono in un solo.

V. Similmente due circonferenze diconsi tangenti quando hanno un solo punto comune. Il contatto di due circoli può essere interno od esterno.

VI. Chiamasi *angolo inscritto* nel circolo quello che ha il vertice sulla circonferenza, ed è compreso fra due corde; le corde stesse diconsi anche linee inscritte nel circolo.

Dicesi *poligono inscritto*, quello i cui angoli hanno tutti il vertice sulla circonferenza. In questo caso il circolo dicesi circoscritto al poligono.

Poligono circoscritto è quello, che ha tutti i lati tangenti alla circonferenza; in questo caso il circolo si dice inscritto nel poligono.

VII. Due circoli sono eguali, allorchè hanno un egual raggio; altrimenti sono diseguali, ma sempre simili.

Nei circoli diseguali, due segmenti, o due settori, o due archi sono simili, quando i loro raggi estremi formano nei loro centri angoli eguali.

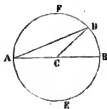
Scolio. È manifesto: 1° che un diametro qualunque AB

(fig. 105) divide il circolo e la sua circonferenza in due parti eguali. Infatti piegando la figura secondo la direzione di AB, e facendo girare la parte superiore AFB attorno al diametro AB, finchè questa parte venga ad applicarsi sopra la parte inferiore AEB; le due parti della circonferenza coincideranno, e si confonderanno perfettamente insieme; altrimenti la circonferenza avrebbe i suoi punti inegualmente distanti dal centro, il che sarebbe in contraddizione colla definizione del circolo.

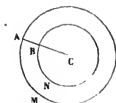
2°. Che una corda qualunque AD è sempre minore del diametro; giacchè essa è sempre minore della somma de'due raggi CA, CD tirati alle sue estremità.

3°. Che una retta non può incontrare la circonferenza di un circolo in più di due punti, perchè da un punto ad una retta non possono tirarsi tre rette eguali (libro 1°, prop. 19, coroll. 2°, penultimo alinea).

4°. Che due circoli descritti nello stesso piano con lo stesso centro e lo stesso raggio, coincidono in tutti i loro punti e formano un solo circolo.

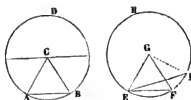
Fig. 105.

5°. Che due circoli concentrici CAM, CBN (fig. 106) cioè descritti in uno stesso piano, e dallo stesso centro C con raggi CA, CB diseguali, avranno le loro circonferenze dappertutto

equidistanti; epperò queste non potranno nè tagliarsi, nè toccarsi.

Fig. 106.

La superficie piana compresa tra due circonferenze concentriche AM, BN, chiamasi *corona circolare.*

PROPOSIZIONE I. — *Teorema.*

Nello stesso circolo, od in circoli eguali, gli angoli eguali fatti al centro ACB, EGF *insistono ad archi eguali; e viceversa gli archi eguali* AB, EF *corrispondono ad angoli al centro eguali* (fig. 107).

Fig. 107.

Dimostrazione. 1°. Facendo coincidere i due angoli eguali ACB, EGF, il centro G cadrà sul centro C, ed a cagione dei raggi eguali il punto E cadrà in A, il punto F in B, ed i due archi AB, EF coincidendo nelle loro estremità, coincideranno in tutti i loro punti, altrimenti i raggi non sarebbero eguali. Dunque ecc.

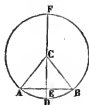
2°. I due archi AB, EF essendo eguali e descritti con lo

stesso raggio, si ponno sovrapporre e coincidendo gli archi, le corde AB, EF coincideranno anche, e saranno perciò eguali; dunque i triangoli ACB, EGF avranno i lati rispettivamente eguali, e saranno per conseguenza eguali fra loro, epperò l'angolo ACB sarà eguale all'angolo EGF.

Scolio. L'arco EI, maggiore di EF, corrisponde ad un angolo al centro EGI maggiore di EGF, e per conseguenza ad una corda EI maggiore della corda EF (prop. 8, lib. 1.): *viceversa* una corda EI maggiore di EF corrisponde ad un angolo al centro EGI maggiore di EGF, e per conseguenza ad un arco EI maggiore dell'arco EF. Dunque nello stesso circolo od in circoli eguali, ad archi maggiori corrispondono corde maggiori, e *viceversa*: ciò vale quando gli archi che si mettono a confronto sono entrambi minori della mezza circonferenza: arriverebbe il contrario se fossero entrambi maggiori della mezza circonferenza.

Proposizione II. — *Teorema.*

Il raggio CD *perpendicolare ad una corda* AB, *divide per mezzo la corda e l'arco sotteso* (fig. 108).

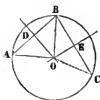
Fig. 108.

Dimostrazione. Tirando i raggi CA, CB, il triangolo ACB è isoscele; dunque la perpendicolare CD abbassata dal vertice sulla base dividerà per mezzo la base e l'angolo del vertice (prop. 16, lib. 1); epperò sarà AE=EB, l'angolo ACD=DCB, e per conseguenza l'arco AD=DB (prop. ant.).

Corollario 1°. La perpendicolare condotta sul mezzo di una corda passa pel centro del circolo, e per mezzo dell'arco sotteso dalla corda.

Quindi si deducono i metodi seguenti:

1°. *Per dividere un arco di circolo in due parti eguali*, si conduca una perpendicolare sul mezzo della sua corda; questa perpendicolare dividerà per mezzo l'arco e l'angolo corrispondente al centro.

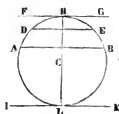
2° *Per trovare il centro di un circolo dato, o più generalmente di un arco dato di circolo* ABC (fig. 109), si conducano le corde AB, BC, e pe'punti di mezzo D, E si conducano le perpendicolari DO, EO: il punto O in cui esse s'incontreranno sarà il centro del circolo o dell'arco dato.

Fig. 109.

3°. *Per far passare una circonferenza di circolo per tre punti dati* A, B, C (fig. 109), si uniscano questi punti due a due con le rette AB, BC, e pe'punti di mezzo di queste si conducano le perpendicolari DO, EO: il punto O, dove esse s'incontrano, sarà egualmente distante dai tre punti A, B, C, e per conseguenza la circonferenza descritta dal punto O come centro, col raggio OA, passerà pei tre punti dati.

Se i tre punti dati fossero in linea retta sarebbe impossibile il condurre per essi una circonferenza di circolo, poichè una retta ed una circonferenza di circolo non ponno avere più di due punti comuni: allora infatti la costruzione precedente riesce illusoria, poichè le due perpendicolari DO, EO essendo parallele non hanno alcun punto comune O.

Quando i punti dati non sono in linea retta non si può trovare che una sola posizione pel centro ed un solo valore pel raggio del circolo domandato: onde per tre punti dati può passare una sola circonferenza di circolo; ossia due circonferenze di circolo non possono avere tre punti comuni senza confondersi insieme.

Corollario 2°. Gli archi AD, BE (fig. 110) *compresi tra due corde parallele* AB, DE *sono eguali*; perchè tirando il raggio CH perpendicolare ad una delle corde, esso sarà pure perpendicolare all'altra; dunque sarà AH=BH, DH=EH, e per conseguenza AH−DH=BH−EH, ossia AD=BE.

Fig. 110.

PROPOSIZIONE III.

Se due circonferenze si tagliano in due punti (fig. 111 e 112), *la retta che passa pei loro centri sarà perpendicolare sul mezzo della corda comune* AB.

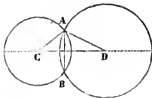
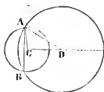



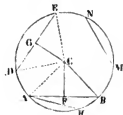
Fig. 111. *Fig. 112.*

Dimostrazione. Se sul mezzo della corda comune AB s'innalza una perpendicolare, essa dee passare per ciascuno dei

due centri C, D (prop. ant. cor.); ma per due punti dati può passare una sola linea retta; dunque la retta CD, che unisce i due centri, sarà perpendicolare sul mezzo della corda comune AB.

Scolio. Allorquando due circonferenze si tagliano si può sempre formare un triangolo, i cui lati sono rispettivamente eguali ai raggi de'due circoli, ed alla distanza de'loro centri: ora, perchè questo triangolo sia possibile, è necessario che la maggiore di queste tre rette sia minore della somma delle altre due: se questa condizione non è soddisfatta, le due circonferenze non ponno tagliarsi.

Proposizione IV. — *Teorema.*

Due corde eguali sono egualmente distanti dal centro; e di due corde diseguali, la minore è la più distante dal centro (fig. 113).

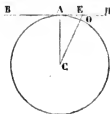
Fig. 113.

Dimostrazione. 1°. Sia la corda AB=DE; i triangoli ACB, DCE avendo i tre lati rispettivamente eguali, saranno eguali fra loro; dunque le loro altezze, cioè le perpendicolari CF, CG che segnano le distanze dal centro alle corde, saranno eguali. Dunque le corde eguali sono egualmente distanti dal centro.

2°. Sia la corda MN minore della corda AB; l'arco MN sarà anche minore dell'arco AB, e prendendo l'arco AH=MN, le due corde AH, MN saranno eguali, ed egualmente distanti

dal centro (dim. ant.); ma la corda AH è più distante dal centro che la corda AB; dunque anche MN sarà più distante dal centro che la corda AB; epperò di due corde diseguali, la minore è più distante dal centro.

PROPOSIZIONE V. — *Teorema.*

La retta BD *perpendicolare all'estremità del raggio* CA, *è tangente al circolo* (fig. 114).

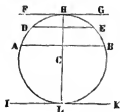
Fig. 114.

Dimostrazione. Prendasi sulla BD un punto qualunque E, e conducasi la CE; questa, perchè obliqua, sarà maggiore della perpendicolare ossia del raggio CA; il punto E sarà dunque fuori del circolo, e la medesima dimostrazione valendo per tutti i punti della BD differenti dal punto A, quest'ultimo punto sarà il solo che sia comune alla BD ed alla circonferenza: epperò la retta BD è tangente alla circonferenza.

Inversamente: La tangente BD è perpendicolare al raggio CA condotto al punto di contatto: perchè il raggio tirato al punto di contatto è la più corta retta che si possa tirare dal centro sulla tangente.

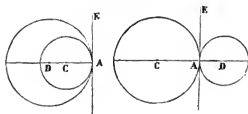
Corollario 1°. Se pel punto di contatto si alza una perpendicolare alla tangente, questa perpendicolare passerà pel centro del circolo, e prolungata bastantemente dividerà il circolo e la sua circonferenza in due parti eguali.

Corollario 2°. Gli archi DH, EH (fig. 115) compresi fra la tangente FG e la corda DE ad essa parallela, sono eguali; perchè il raggio CH perpendicolare alla tangente FG, è anche perpendicolare sulla corda parallela DE; onde risulterà DH=EH (prop. 2).

Se due tangenti FG, IK sono parallele, i loro punti di contatto H, L saranno diametralmente opposti, e divideranno la circonferenza in due parti eguali, cioè sarà HAL=HBL.

Fig. 115.

PROPOSIZIONE VI. — *Teorema.*

Se due circoli sono tangenti l'uno all'altro interiormente o esteriormente (fig. 116), *i loro centri* C, D *ed il punto di contatto* A *sono posti sopra una medesima retta perpendicolare alla tangente comune* AE.

Fig. 116.

Dimostrazione. Se dal punto di contatto A si alza una perpendicolare alla tangente comune AE, questa perpendicolare dee

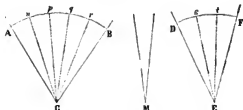
passare per ciascuno de'due centri C, D; dunque i tre punti C, D, A sono sopra una stessa retta perpendicolare alla tangente AE comune ai due circoli.

Scolio. Se due circonferenze di circolo si toccano interiormente od esteriormente, la distanza de'loro centri è uguale alla differenza od alla somma de'raggi e viceversa.

PROPOSIZIONE VII. — *Teorema.*

Se due angoli ACB, DEF (fig. 117) *stanno tra loro come due numeri intieri, gli archi* AB, DF *compresi tra i loro lati, e descritti dai loro vertici come centri con raggi eguali, staranno tra loro come questi stessi numeri, e si avrà la proporzione:*

angolo ACB:angolo DEF::arco AB:arco DF.

Fig. 117.

Dimostrazione. Suppongasi che i due angoli ACB, DEF sieno fra loro come 5 al 3, e ciò che torna allo stesso, suppongasi che l'angolo M, loro comune misura, sia contenuto 5 volte nell'angolo ACB, e 3 volte nell'angolo DEF; i piccoli angoli AC*n*, *n*C*p* ecc. DE*s*, *s*E*t* ecc. essendo eguali, gli archi corrispondenti A*n*, *np* ecc. D*s*, *st* ecc. saranno anche eguali fra loro; dunque l'arco intero AB starà all'arco intero DF come 5 al 3; dunque la *ragione* degli angoli è eguale a quella degli archi, cioè sarà

ang. ACB:ang. DEF::arco AB:arco DF.

Lo stesso ragionamento può applicarsi a qualunque altra ragione diversa dalla supposta 5 al 3, purchè sia espressa da due numeri interi.

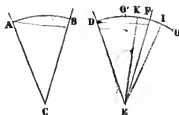
Scolio. Viceversa: se gli archi AB, DF fossero fra loro come due numeri interi, gli angoli ACB, DEF starebbero tra loro come gli stessi numeri, e si avrebbe sempre

ACB:DEF::AB:DF.

Perchè ai piccoli archi eguali tra loro corrispondono piccoli angoli parimenti eguali tra loro.

PROPOSIZIONE VIII. — *Teorema.*

Qualunque sia la ragione di due angoli ACB, DEF (fig. 118), *essi saranno sempre fra loro come gli archi* AB, DF *compresi tra i loro lati e descritti dai loro vertici come centri, con raggi eguali.*

Fig. 118.

Dimostrazione. Ritenendo i tre primi termini della proporzione enunciata nel teorema, si dimostra che il quarto termine X della proporzione

ang. ACB:ang. DEF::arco AB:X

non può essere maggiore nè minore dell'arco DF. Infatti se fosse

ACB:DEF::AB:DO maggiore di DF;

dividendo l'arco AB in parti eguali, e minori di FO (il che si può agevolmente eseguire ripetendo la divisione per 2), e portando col compasso una di queste parti successivamente sull'arco DO, vi cadrà almeno un punto di divisione I tra F ed O; tirando il raggio EI, a cagione degli archi *commensurabili* AB, DI si avrà

ACB:DEI::AB:DI.

Questa proporzione e la precedente avendo gli stessi antecedenti, daranno la seguente:

DEF:DEI::DO:DI

che è una proporzione visibilmente assurda, perchè DEF è minore di DEI, mentre DO è maggiore di DI.

Dunque il quarto termine X non può essere maggiore dell'arco DF. Si dimostra medesimamente che lo stesso quarto termine non può essere minore di DF.

Dunque sarà X=arco DF; è qualunque sia la ragione dei due angoli, starà sempre la proporzione

ang. ACB: ang. DEF:: arco AB: arco DF.

Corollario. Prendendo per unità degli angoli un angolo determinato, per esempio l'angolo retto, e per unità degli archi l'arco corrispondente, cioè il quadrante descritto con un determinato raggio, e misurando rispettivamente con queste due unità un altro angolo qualsivoglia, e l'arco compreso fra i suoi lati e descritto col raggio del quadrante; si troverà che starà l'angolo

proposto all'angolo retto, come l'arco proposto sta al quadrante: epperò l'angolo e l'arco corrispondente verranno espressi dallo stesso numero. Ogni angolo ha dunque per misura l'arco compreso fra i suoi lati, o più chiaramente: ogni angolo contiene tanta parte dell'angolo retto, quanta è la parte di quadrante contenuta nell'arco che chiude l'angolo proposto.

Scolio 1°. Per facilitare la misura degli angoli, si divide la circonferenza del circolo in 360 parti eguali, che chiamansi *gradi*; ciascun grado si divide pure in 60 parti uguali, che diconsi *minuti primi*, o solamente *minuti*; il minuto si divide in 60 *secondi*, ed il secondo in 60 *minuti terzi* ecc. Secondo questa divisione il quarto della circonferenza, ossia il quadrante, contiene 90 gradi, che sono la misura di un angolo retto; un angolo di 45 gradi sarà semiretto, e quello di 30 gradi sarà il terzo di un retto.

I numeri che esprimono gradi, minuti, secondi ecc., si contraddistinguono co'segni °, ', " ecc., scritti alla destra dei numeri medesimi a modo di esponenti: così l'espressione 45° 4' 18" indica un arco o un angolo di 45 gradi, 4 minuti, 18 secondi.

Questa è l'antica divisione detta *sessagesimale*, di cui generalmente si fa uso presso tutte le nazioni. Nella nuova divisione chiamata *centesimale*, e di cui si servono alcuni scrittori francesi, la circonferenza è divisa in 400 *gradi*; epperò l'angolo retto o il *quadrante* è di 100 *gradi*; ciascun *grado* si suddivide in 100 *minuti*, ed il minuto in 100 *secondi*.

Il numero 360 avendo più divisori che il 400, vi ha un maggior numero di archi aliquoti della circonferenza espressi in numeri intieri nella divisione sessagesimale, che non nella divisione centesimale; ma quest'ultima essendo conforme al sistema decimale di numerazione, rende più agevoli i calcoli, e dispensa dall'uso de'numeri complessi. Tuttavia per uniformarsi all'uso stabilito servirà in questo trattato la divisione sessagesimale.

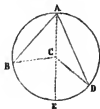
Un arco espresso in gradi sessagesimali si esprime in gradi centesimali, riducendo prima i minuti ed i secondi in frazione

decimale di grado, e moltiplicando poi tutto per $\frac{10}{9}$: viceversa un arco espresso in gradi centesimali, si riduce alla divisione sessagesimale, moltiplicandolo per $\frac{9}{10}$ e riducendo poi le frazioni decimali in minuti e secondi.

Scolio 2°. In ciascun arco conviene accuratamente distinguere l'ampiezza dell'arco dalla sua lunghezza assoluta: la prima dipende dalla ragione dell'arco proposto coll'intera circonferenza, e non dal raggio con cui è descritto, e viene espressa dal numero dei gradi, minuti e secondi che esso contiene: la seconda, cioè la lunghezza assoluta, dipende insieme e dall'ampiezza dell'arco e dalla grandezza del raggio, con cui l'arco è stato descritto. La misura degli angoli si desume dall'ampiezza degli archi corrispondenti e non dalla loro lunghezza assoluta.

Proposizione IX. — *Teorema.*

Ogni angolo inscritto in un circolo ha per misura la metà dell'arco compreso tra i suoi lati (fig. 119).

Fig. 119.

Dimostrazione. Il centro C può essere sopra un lato dell'angolo, dentro l'angolo, o fuori dell'angolo inscritto.

1°. Se il centro C è sopra un lato dell'angolo BAE, tirando il raggio CB, l'angolo BCE esteriore al triangolo BCA è eguale alla somma de'due interni BAC, CBA; ma il triangolo BCA essendo isoscele, l'angolo BAC=CBA; dunque l'angolo BCE è doppio dell'angolo BAE. Ora l'angolo al centro BCE ha per misura l'arco BE (prop. ant. coroll.), dunque l'angolo

BAE avrà p r misura la metà dell'arco BE. Similmente l'angolo DAE avrà per misura la metà dell'arco ED.

2°. Se il centro C è dentro l'angolo BAD, tirando il diametro AE, l'angolo BAE ha per misura la metà dell'arco BE, e l'angolo EAD ha per misura la metà di ED; dunque tutto l'angolo BAD avrà per misura la metà dell'arco BD.

3°. Se il centro C è fuori dell'angolo BAD (fig. 120) tirando il diametro AE, l'angolo BAE ha per misura la metà di BE, e l'angolo DAE la metà di DE; dunque la loro differenza BAD avrà per misura la metà di BE meno la metà di DE, ossia la metà di BD.

Dunque qualunque angolo inscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

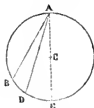
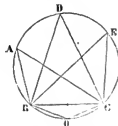
Fig. 120.

Corollario 1°. Tutti gli angoli BAC, BDC, BEC ecc. (fig. 121) inscritti nello stesso segmento, sono eguali, perchè hanno tutti per misura la metà di uno stesso arco BOC.

Fig. 121.

Corollario 2°. Ogni angolo BAD (fig. 122) inscritto nel

semicircolo, è un angolo retto; perchè ha per misura la metà della mezza circonferenza, ossia il quarto della circonferenza intera.

Dunque in un semicircolo, qualunque retta AE perpendicolare al diametro, è media proporzionale tra i due segmenti BE, ED del diametro (prop. 15, lib. 3); e qualunque corda BA condotta da un estremità del diametro, è media proporzionale tra il diametro BD ed il segmento adiacente BE; quindi se due o più corde avessero un'estremità comune col diametro, i loro quadrati starebbero fra loro, come i rispettivi segmenti del diametro compresi tra l'estremità comune e le perpendicolari calate dalle altre estremità.

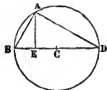
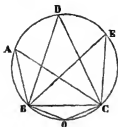
Fig. 122.

Corollario 3°. Qualunque angolo BAC (fig. 123) inscritto in un ségmento maggiore del semicircolo, è un angolo acuto, e qualunque angolo BOC inscritto in un segmento minore del semicircolo, è un angolo ottuso.

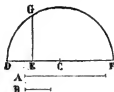
Fig. 123.

Corollario 4°. I due angoli opposti O e D di un quadrilatero BOCD inscritto nel circolo, riuniti, eguagliano due retti.

Scolio. Colla scorta del coroll. 2° precedente si ponno enunciare nel modo seguente le soluzioni dei due problemi già risoluti nel lib. 1 e 3: cioè alzare una perpendicolare all'estremità di una retta; e trovare una media proporzionale tra due rette date.

1°. *Per alzare una perpendicolare all'estremità* B *di una retta data* AB (fig. 124), *da un centro qualunque* C si descriva una circonferenza, che passi per B e per un altro punto D della retta data, si tiri il diametro DE, e quindi la retta BE, questa sarà la perpendicolare ricercata.

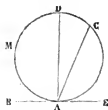
Fig. 124.

2° *Per trovare una media proporzionale tra due rette date* A *e* B (fig. 125), prendasi DE=B, EF=A, descrivasi sopra DF una mezza circonferenza, e dal punto E si alzi la perpendicolare EG, questa sarà la media proporzionale ricercata.

Fig. 125.

Proposizione X. — *Teorema.*

L'angolo BAC *fatto da una tangente* BA *e da una corda* AC,

ha per misura la metà dell'arco AMC *compreso tra i suoi lati* (fig. 126).

Fig. 126.

Dimostrazione. Tirando dal punto di contatto A il diametro AD, l'angolo BAD sarà retto (prop. 5), ed avrà per misura la metà della mezza circonferenza AMD; l'angolo DAC ha per misura la metà di DC (prop. ant.); dunque l'angolo totale BAC avrà per misura la metà dell'arco totale AMC.

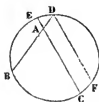
Medesimamente l'angolo CAE ha per misura la metà dell'arco AC compreso tra i suoi lati; perchè l'angolo CAE è la differenza tra l'angolo retto DAE e l'angolo DAC, dunque avrà per misura

$$\frac{ACD}{2}-\frac{CD}{2}=\frac{AC}{2}$$

PROPOSIZIONE XI. — *Teorema.*

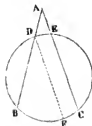
L'angolo BAC (fig. 127), *che ha il vertice* A *tra il centro e la circonferenza, ha per misura la metà dell'arco* BC *compreso*

fra i suoi lati, più la metà dell'arco ED *compreso tra i prolungamenti degli stessi lati.*

Fig. 127.

Dimostrazione. Dal punto D tirisi la corda DF parallela ad EC; l'angolo BAC essendo eguale all'angolo BDF, avrà la stessa misura di questo, cioè la metà dell'arco BCF, ossia la metà de'due archi BC, ED; giacchè per cagione delle parallele DF, EC l'arco CF=ED.

PROPOSIZIONE XII. — *Teorema.*

L'angolo BAC (fig. 128) *compreso fra due seganti che si tagliano fuori del circolo, ha per misura la metà della differenza dei due archi* BC, DE *compresi tra i suoi lati.*

Fig. 128.

Dimostrazione. Dal punto D tirisi DF parallela al lato AC: l'angolo BAC essendo eguale all'angolo BDF, avrà la stessa misura di questo, cioè la metà dell'arco BF; ma BF è la differenza

degli archi BC e FC, oppure degli archi BC e DE, giacchè FC=DE per cagione delle parallele DF, EF; dunque la misura dell'angolo BAC è la semi-differenza de'due archi opposti BC, DE compresi tra i lati dell'angolo.

Scolio. L'angolo AOC (fig. 129) compreso fra una segante OC ed una tangente OA, ha anche per misura la semi-differenza de' due archi AC, AD compresi tra i suoi lati: e si dimostra medesimamente prolungando la tangente OA e tirando dal punto A una corda parallela al lato OC.

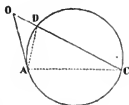
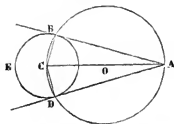
Fig. 129.

E l'angolo BAD (fig. 130) formato da due tangenti allo stesso circolo BDE, ha ancora per misura la semi-differenza dei due archi compresi tra i suoi lati, cioè $\frac{BED}{2}-\frac{BD}{2}$: e si dimostra come nel caso di due seganti, tirando cioè dal punto di contatto di una delle tangenti una corda parallela all'altra tangente.

Fig. 130.

Proposizione XIII. — *Problema.*

Per un punto dato sulla circonferenza di un circolo, o fuori

di questa circonferenza, condurre una tangente alla circonferenza medesima (fig. 130).

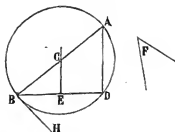
Risoluzione. Se il punto dato si trova sulla circonferenza, per esempio in B, tirisi il raggio CB al punto dato, e per lo stesso punto si alzi BA perpendicolare al raggio CB, questa perpendicolare sarà tangente al circolo (prop. 5).

Se il punto dato è fuori del circolo, per esempio, in A, tirisi dal centro C la retta CA, e dividasi per mezzo in O; dal centro O col raggio OC descrivasi una circonferenza, che taglierà la circonferenza data in due punti B, D; tirinsi le rette AB, AD: queste saranno ambedue tangenti al circolo dato EBD. Infatti tirando il raggio CB, l'angolo CBA sarà retto, siccome inscritto nel semicircolo ABC, e la AB perpendicolare all'estremità del raggio CB, sarà tangente al circolo EBD; si dirà lo stesso di AD.

Si vede da questa costruzione medesima, che da un punto preso fuori di un circolo, si possono tirare allo stesso circolo due tangenti eguali AB, AD.

PROPOSIZIONE XIV. — *Problema.*

Sopra una retta data BD *descrivere un segmento di circolo capace di un angolo dato* F (fig. 131).

Fig. 131.

Risoluzione. Facciasi l'angolo DBH=F; sul mezzo di BD si alzi la perpendicolare EC, e pel punto B tirisi BA perpen-

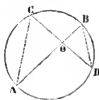
dicolare a BH; dal punto d'incontro C come centro, col raggio CB descrivasi un circolo; il segmento ricercato sarà BAD.

Infatti BH essendo perpendicolare all'estremità del raggio CB, sarà tangente al circolo, e l'angolo DBH avrà per misura la metà dell'arco BD; ma l'angolo BAD ha anche per misura la metà dell'arco BD; dunque sarà l'angolo BAD=DBH=F. Dunque tutti gli angoli inscritti nel segmento BAD sono eguali all'angolo F.

Scolio. Se l'angolo dato F fosse retto, il segmento ricercato sarebbe il semicircolo descritto sulla retta data BD come diametro.

PROPOSIZIONE XV. — *Teorema.*

Le parti di due corde AB, CD, (fig. 132) *che si tagliano nel circolo, sono inversamente proporzionali, cioè una parte* AO *di una corda starà ad una parte* OD *dell'altra, come la seconda parte* OC *di questa sta alla seconda parte* OB *della prima.*

Fig. 132.

Dimostrazione. Conducansi le rette AC, BD: nei triangoli ACO, DBO gli angoli in O sono eguali come opposti al vertice, l'angolo A=D perchè inscritto nel medesimo segmento, e l'angolo C=B per la stessa ragione. Dunque i due triangoli ACO, DBO sono simili e danno la proporzione

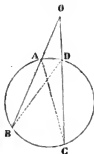
$$AO:OD::OC:OB.$$

Corollario. Il rettangolo costrutto sulle due parti di una corda è equivalente al rettangolo costrutto sulle due parti dell'altra, poichè si ha

$$AO \times OB = OD \times OC.$$

Proposizione XVI. — *Teorema.*

Due seganti OB, OC, (fig. 133) *tirate da uno stesso punto* O *preso fuori del circolo, sono inversamente proporzionali alle loro parti esterne; cioè una segante* OB *starà all'altra* OC, *come la parte esterna* DO *di questa sta alla parte esterna* AO *della prima.*

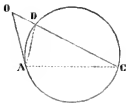
Fig. 133

Dimostrazione. Si conducano le rette AC, BD: i due triangoli OBD, OCA hanno l'angolo O comune, e l'angolo B=C; dunque questi due triangoli sono simili, ed i loro lati omologhi daranno la proporzione

$$OB : OC :: DO : AO.$$

Corollario. Dunque sarà $OB \times AO = OC \times DO$; cioè i rettangoli costrutti sopra ciascuna segante e sulla sua parte esteriore sono equivalenti.

Proposizione XVII. — *Teorema.*

Se da uno stesso punto O *preso fuori del circolo si conduce una tangente* OA *ed una segante* OC, *la tangente sarà media proporzionale tra la segante e la sua parte esterna; cioè la segante* OC *starà alla tangente* OA *come la tangente stessa* OA *sta alla parte esterna* OD *della segante* (fig. 134).

Fig. 134.

Dimostrazione. Si tirino le rette AC, AD: i due triangoli OAC, ODA hanno l'angolo O comune, e l'angolo C$=$OAD, perchè hanno ambidue per misura la metà dello stesso arco AD: dunque i due triangoli sono simili e daranno la proporzione

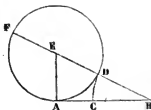
$$OC:OA::OA:OD.$$

Corollario. Dunque sarà $\overline{OA}^2 = OC \times OD$; cioè il quadrato della tangente è equivalente al rettangolo della segante per la sua parte esteriore.

Proposizione XVIII. — *Problema.*

Dividere una retta data AB *in media ed estrema ragione: cioè dividere la retta in due parti tali, che la maggiore* BC *di*

queste due parti sia media proporzionale tra tutta la retta AB *e la sua parte minore* AC (fig. 135).

Fig. 135.

Risoluzione. All'estremità A della retta data si alzi la perpendicolare AE eguale alla metà di AB, e tirisi BE; dal punto E come centro, col raggio EA seghisi la BE in D, e prendasi BC=BD; la retta AB sarà divisa nel punto C nella maniera dimandata; cioè sarà

$$AB:BC::BC:AC.$$

Infatti compiendo il circolo ADF, e prolungando BE in F, la retta AB perpendicolare all'estremità del raggio EA è una tangente e BF una segante; dunque (prop. ant.) sarà

$$BF:AB::AB:BD,$$

e *dividendo* si avrà

$$BF-AB:AB::AB-BD:BD.$$

Ma BF−AB=BD=BC, poichè per costruzione AB=FD, ed AB−BD=AC; dunque sostituendo si avrà

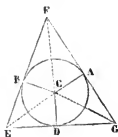
BC:AB::AC:BC

ed *invertendo* risulterà

AB:BC::BC:AC.

PROPOSIZIONE XIX. — *Problema.*

Inscrivere un circolo in un triangolo dato EFG (fig. 136).

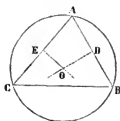
Fig. 136.

Risoluzione. Si dividano per mezzo due angoli E, G del triangolo colle rette EC, GC concorrenti in C; dal punto C si tirino le perpendicolari CA, CB, CD sopra i tre lati del triangolo, queste saranno eguali, perchè i due triangoli EBC, EDC avendo gli angoli in E eguali, gli angoli in B e D retti e l'ipotenusa EC comune, saranno eguali; dunque CB=CD; nella stessa maniera si dimostra CD=CA, dunque le tre perpendicolari saranno eguali; epperò il circolo descritto dal centro C col raggio CA passerà pei punti A, B, D e sarà inscritto nel triangolo; infatti i tre lati del triangolo EFG essendo perpendicolari alle estremità de'raggi CA, CB, CD, saranno tangenti al circolo.

Scolio. Le tre rette che dividono per mezzo i tre angoli di un triangolo, concorrono in un medesimo punto che è il

centro del circolo inscritto, e dividono il triangolo dato in tre altri triangoli, che hanno rispettivamente per basi i lati del primo triangolo e per altezza il raggio del circolo inscritto. D'onde risulta che l'*area* di un triangolo è anche eguale alla metà del prodotto del suo perimetro pel raggio del circolo inscritto.

Proposizione XX. — *Problema.*

Circoscrivere un circolo ad un triangolo dato ABC (fig. 137).

Fig. 137.

La soluzione di questo problema si riduce a far passare una circonferenza di circolo per tre punti dati; cioè pei tre vertici del triangolo dato, secondo il metodo indicato nella proposizione 2. Dunque basterà alzare sul mezzo di due lati AB, AC le perpendicolari DO, EO; il loro punto d'incontro O sarà il centro del circolo circoscritto al triangolo.

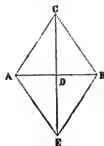
Scolio. Dai due ultimi problemi risulta che si può sempre inscrivere e circoscrivere un circolo ad un triangolo qualunque dato. Ma non può dirsi generalmente lo stesso riguardo agli altri poligoni. Tra i quadrilateri, per esempio, possono essere inscritti nel circolo que' soli, in cui la somma di due angoli opposti è eguale a due angoli retti (prop. 9, coroll. 4). Onde tutti i rettangoli sono *inscrittibili*, e le due diagonali del rettangolo sono due diametri del circolo circoscritto.

Tutti i trapezi *isosceli*, o *simmetrici* sono parimente inscrittibili.

Chiamansi trapezi *isosceli* quelli che hanno i due lati non paralleli eguali, ossia quelli che sono formati dal segmento inferiore di un triangolo isoscele tagliato parallelamente alla base. Simili trapezi diconsi anche *simmetrici*, perchè la linea che passa pel mezzo delle due basi è perpendicolare a queste basi e divide il trapezio in due parti simmetriche.

I rombi, i romboidi e tutti gli altri quadrilateri che non soddisfano alla condizione citata, non possono inscriversi al circolo.

Il rombo però può sempre circoscriversi al circolo. Infatti nel rombo ACBE (fig. 138) le diagonali AB, CE dividono per mezzo gli angoli A, B, C, E; dunque il loro punto d'incontro D è equidistante dai lati del rombo (prop. 19); epperò è il centro del circolo inscritto.

Fig. 138.

Le eccezioni sono vieppiù numerose riguardo ai poligoni di un maggior numero di lati.

Problemi relativi al libro IV.

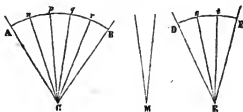
I. *Dati due archi di egual raggio, trovare col* compasso *la loro comune misura, e quindi la ragione numerica delle loro lunghezze.*

Sieno AB, DF (fig. 139) i due archi dati: col compasso si applichi la corda dell'arco minore DF al maggiore AB, e stiavi, a cagion d'esempio, una volta da A in q, col resto qB, l'arco DF coinciderà coll'arco Aq, e si avrà

$$\text{arco } AB = \text{arco } DF + \text{arco } qB;$$

si porti medesimamente la corda del resto qB sull'arco minore DF, e stiavi una volta da D in t, col resto tF si avrà così

$$DF = qB + tF;$$

Fig. 139.

si porti la corda del secondo resto tF sul primo qB, e siavi contenuta due volte esattamente, di modo che si abbia $qB = 2tF$; l'ultimo resto tF contenuto esattamente nel precedente sarà la

comune misura dei due archi: perchè dal valore dell'arco qB risalendo a quelli degli archi precedenti, si troverà $DF=3tF$, e $AB=5tF$; e così la comune misura tF essendo contenuta 5 volte nell'arco AB, e 3 volte nell'arco DF, si avrà

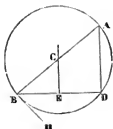
$$\text{arco } AB : \text{arco } DF :: 5 : 3.$$

Se si arrivasse ad un resto così piccolo da non potersi più trattare col compasso, si trascurerebbe e si avrebbero per approssimazione soltanto, la comune misura, e la ragione numerica dei due archi.

II. *Dati due angoli, trovare la loro ragione numerica.*

Risoluzione. Si chiudano i due angoli dati con due archi di egual raggio; si cerchi secondo il problema precedente la ragione numerica dei due archi, essa sarà eguale a quella dei due angoli dati (prop. 7).

III. *Descrivere un circolo, la cui circonferenza tocchi una retta data* BH *in* B, *e passi per un secondo punto* D, *dato fuori della retta* BH (fig. 140).

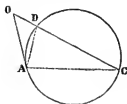
Fig. 140.

Risoluzione. Si tiri la retta BD, e dal punto di mezzo E si alzi la perpendicolare EC; dal punto B si alzi BA perpendicolare a BH; il punto d'incontro C delle due perpendicolari

sarà il centro del circolo dimandato, ed il suo raggio sarà CB o CD.

IV. *Per due punti dati, far passare una circonferenza di circolo di un raggio dato.*

Risoluzione. Facciasi centro successivamente ne' due punti dati, e col raggio dato si descrivano due circonferenze: queste si taglieranno in due punti, ciascuno de' quali sarà il centro di un circolo che adempie le condizioni imposte.

V. *Descrivere una circonferenza, che passi per due punti dati* C, D (fig. 141), *e tocchi una retta indefinita* OA *data di posizione.*

Fig. 141.

Risoluzione. Si uniscano i punti C, D colla retta CD, che si prolungherà sin che incontri OA in O; OC sarà una segante del circolo dimandato, e OD sarà la sua parte esterna; cercando ora una media proporzionale fra OC e OD, e portando questa media nella direzione di OA, si troverà il punto di contatto A; e si compirà la soluzione, come è stato insegnato al problema 3.

Se i due punti dati C, D fossero sopra una retta parallela ad OA, allora basterebbe innalzare sul mezzo di CD una perpendicolare, ed il punto d' incontro di questa perpendicolare coll'indefinita OA sarebbe il punto di contatto.

hanno il lato OB comune, il lato AB=BC per ipotesi, e l'angolo ABO=OBC per costruzione; dunque il triangolo isoscele AOB è eguale a BOC; epperò sarà OC=OA=OB, e l'angolo BCO=BAO, il che prova che l'angolo C è anche diviso per mezzo della retta OC. Si dimostra medesimamente che OD=OB=OC, e che l'angolo D è diviso per mezzo della retta OD ecc. Dunque il circolo descritto dal centro O col raggio OA passerà per tutti i vertici B, C, D, E, F del poligono, e sarà per conseguenza circoscritto al poligono.

2°. I lati del poligono, AB, BC, CD ecc., essendo altrettante corde eguali del circolo circoscritto, esse saranno egualmente distanti dal centro O, e le perpendicolari OG, OH ecc., abbassate dal centro O sopra ciascun lato, saranno eguali; dunque il circolo descritto dal centro O col raggio OG toccherà tutti i lati del poligono nel loro punto di mezzo G, H ecc., e sarà perciò inscritto nel poligono.

Corollario. Il centro comune del circolo inscritto e del circolo circoscritto trovasi pure nel punto d'incontro delle perpendicolari innalzate ne' punti di mezzo di due lati qualunque del poligono.

Scolio. Il punto O, centro comune del circolo inscritto e del circolo circoscritto, chiamasi anche *centro* del poligono. La perpendicolare OG abbassata dal centro sopra un lato qualunque del poligono regolare chiamasi *cateto* o *apotema* del poligono.

L'angolo AOB fatto da due raggi tirati alle estremità di uno stesso lato chiamasi *angolo al centro*, per distinguerlo dall'*angolo al perimetro* ABC fatto da due lati del poligono.

In uno stesso poligono regolare tutti gli angoli al centro sono eguali, perchè corrispondono a corde eguali, e per conseguenza ad archi eguali del circolo circoscritto; e la loro somma è sempre eguale a quattro angoli retti; dunque si otterrà la misura dell'angolo al centro, dividendo 4 retti ossia 360 gradi pel numero de' lati del poligono.

Il valore dell'angolo al perimetro si ottiene dividendo pel numero de'lati la somma di tutti gli angoli del poligono espressa

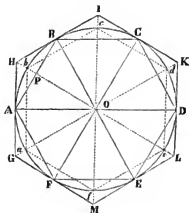
in gradi od in angoli retti: ed allo stesso risultato si perviene sottraendo l'angolo al centro AOB da due retti, poichè il resto eguale alla somma de' due angoli ABO e BAO sarà pure eguale ad ABC, per essere

$$\mathrm{ABO}=\mathrm{BAO}=\frac{1}{2}\mathrm{ABC}.$$

Scolio 2.° Il problema inverso, *cioè ad un dato circolo inscrivere e circoscrivere un poligono regolare di un dato numero di lati*, non può risolversi direttamente se non che in certi casi particolari, come si vedrà a suo luogo.

PROPOSIZIONE II. — *Teorema.*

Se una circonferenza di circolo ABCD.... (fig. 143) *è divisa in parti eguali nei punti* A, B, C, D., *ecc., tirando le corde pei consecutivi punti di divisione, il poligono inscritto, formato da queste corde, sarà regolare; e conducendo le tangenti per gli stessi punti di divisione, il poligono circoscritto formato da queste tangenti sarà parimente regolare.*

Fig. 143.

Dimostrazione. 1°. I lati AB, BC, CD ecc. saranno tutti

eguali, siccome corde di archi eguali: e gli angoli ABC, BCD, CDE ecc. saranno pure tutti eguali, siccome inscritti in segmenti eguali; dunque il poligono ABCDEF sarà regolare.

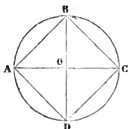
2°. I lati AB, BC, CD, ecc. essendo eguali, e gli angoli HAB, HBA, IBC, ICB, ecc. essendo parimente eguali come aventi tutti per misura la metà di archi eguali, i triangoli AHB, BIC, CKD ecc. saranno eguali ed isosceli; dunque gli angoli H, I, K, L ecc. saranno eguali, ed i lati GH, HI, IK, KL ecc. saranno anche eguali, siccome doppi dei lati de' triangoli isosceli eguali AHB, BIC, ecc. Dunque il poligono circoscritto GHIKLM sarà regolare.

Corollario. Quindi, *dato un poligono regolare inscritto* ABCDEF (fig. 143), si circoscriverà un poligono regolare dello stesso numero di lati, conducendo le rette GH, HI, IK, ecc. tangenti al circolo nei punti A, B, C ecc., che sono i vertici del poligono inscritto; oppure conducendo le tangenti al circolo ne' punti di mezzo degli archi sottesi dai lati dello stesso poligono inscritto.

Viceversa: *dato un poligono circoscritto* GHIKLM, si otterrà il poligono inscritto di egual numero di lati, tirando le corde AB, BC, CD ecc. tra i punti di contatto consecutivi; oppure tirando i raggi OG, OH, OI ecc., e quindi le corde *ab*, *bc*, *cd*, ecc. tra i punti, dove questi raggi tagliano la circonferenza.

PROPOSIZIONE III. — *Problema.*

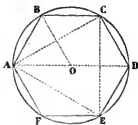
Inscrivere un quadrato in un circolo dato (fig. 144).

Fig. 144.

Risoluzione. Tirinsi due diametri AC, BD perpendicolari l'uno all'altro; ed uniscansi le loro estremità colle rette AB, BC, CD, DA; il quadrilatero ABCD sarà il quadrato inscritto; giacchè i due diametri AC, BD dividono manifestamente la circonferenza in quattro parti eguali.

Scolio. Il triangolo AOB essendo rettangolo ed isoscele, si avrà $AB:AO::\sqrt{2}:1$; dunque prendendo il raggio $=1$, il lato del quadrato inscritto sarà espresso da $\sqrt{2}$.

PROPOSIZIONE IV. — *Problema.*

Inscrivere in un circolo dato un esagono regolare, ed un triangolo equilatero (fig. 145).

Fig. 145.

Risoluzione. Si porti il raggio del circolo successivamente sulla circonferenza come corda; esso vi starà sei volte esattamente, e si avrà così l'esagono regolare inscritto.

Infatti, sia ABCDEF un esagono regolare: l'angolo al centro AOB eguale alla sesta parte di quattro retti sarà di 60° e l'angolo al perimetro ABC eguale alla sesta parte di otto retti sarà di 120°, cioè doppio dell'angolo al centro; ma i raggi OA, OB tirati dal centro agli angoli del poligono dividono questi angoli per mezzo (prop. 1); dunque sarà l'angolo ABO=BOA=OAB; epperò sarà il lato AB eguale al raggio OA. Dunque il lato dell'esagono regolare inscritto è eguale al raggio del circolo.

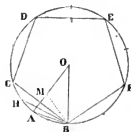
Inscritto l' esagono ABCDEF, si otterrà pure il triangolo equilatero inscritto, coll'unire i vertici dell'esagono di due in due, conducendo le corde AC, CE ed EA.

Scolio. Il triangolo ACD essendo rettangolo in C, si ha $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2-\overline{CD}^2$, e facendo il raggio $AO=1$, sarà $\overline{AC}^2=4-1$, e quindi $AC=\sqrt{3}$; dunque, se si prende il raggio del circolo per unità, il lato del triangolo equilatero inscritto sarà $=\sqrt{3}$.

Corollario. La corda dell' arco di 60° essendo eguale al raggio, ci si presenta un mezzo facile di dividere l'angolo retto in tre parti eguali. Infatti, dividendo per mezzo l'arco sotteso dalla corda eguale al raggio, ciascuna metà sarà di 30°, e l'angolo al centro corrispondente sarà la terza parte di un angolo retto.

Proposizione V. — *Problema.*

Inscrivere in un circolo dato un decagono regolare, ed un pentagono regolare (fig. 146).

Fig. 146.

Risoluzione. Dividasi il raggio del circolo OA in media ed estrema ragione, e portisi la parte maggiore MO di seguito sulla circonferenza come corda; essa vi starà dieci volte esattamente, e si avrà così il decagono regolare inscritto.

Infatti sia la corda AB il lato del decagono regolare inscritto: tirando i raggi OA, OB, l'angolo al centro O sarà la decima parte di quattro angoli retti, e conterà 36 gradi, e l'angolo al perimetro sarà la decima parte di sedici retti, cioè sarà di 144 gradi; dunque l'angolo al perimetro sarà quadruplo dell'angolo al centro O; epperò l'angolo OBA=OAB, metà dell'angolo al perimetro, sarà doppio dell'angolo O, cioè sarà di 72 gradi.

Dividasi ora per mezzo l'angolo OBA con la retta BM, sarà l'angolo MBO=O, ed il lato MO=MB, e l'angolo AMB esteriore

al triangolo iscoscele BMO sarà doppio dell'interiore O, e per conseguenza eguale all'angolo MAB; dunque sarà AB=MB=MO.

Ciò posto, nel triangolo OAB la retta BM dividendo l'angolo B per mezzo, taglierà il lato opposto OA in parti proporzionali ai lati adiacenti (prop. 3, lib. 3); dunque sarà

$$OB:AB::MO:MA;$$

e sostituendo OA in vece di OB, e MO invece di AB, si avrà OA:MO::MO:MA; dunque il raggio OA è diviso in media ed estrema ragione nel punto M, e la parte maggiore MO è uguale al lato AB del decagono regolare inscritto.

Per inscrivere il pentagono regolare BCDEF, si condurranno le corde BC, CD, DE ecc. che sottendano archi doppi di quelli che sono sottesi dai lati del decagono.

Scolio. Chiamando x il lato del decagono regolare e prendendo il raggio per unità, si ha

$$1:x::x:1-x,$$

ossia

$$x^2+x=1,$$

d'onde si ricava

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4};$$

quindi

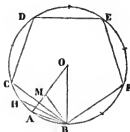
$$x+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{5},$$

e finalmente

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

PROPOSIZIONE VI. — *Problema.*

Inscrivere in un circolo un pentedecagono *regolare, cioè un poligono regolare, di quindici lati* (fig. 147).

Fig. 147.

L'arco sotteso dal lato del pentedecagono regolare inscritto è la differenza de'due archi sottesi rispettivamente dai lati dell'esagono e del decagono. Infatti gli archi sottesi dal lato dell'esagono e da quello del decagono essendo rispettivamente eguali alla sesta ed alla decima parte della circonferenza, la loro differenza sarà eguale alla quindicesima parte della circonferenza medesima, poichè

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$$

Dunque per inscrivere in un circolo un poligono regolare di 15 lati, si condurranno per uno stesso punto B la corda BH eguale al raggio e la corda BA eguale al lato del decagono regolare; l'arco AH, differenza de'due archi BH, BA, sarà la quindicesima parte della circonferenza, e la sua corda sarà il lato del *pentedecagono* regolare inscritto.

Scolio. Un poligono regolare essendo inscritto in un circolo, se si divideranno per mezzo gli archi sottesi dai suoi lati e si tireranno le corde de'mezzi archi, si formerà un nuovo poligono

regolare di un numero doppio di lati: dunque il quadrato servirà a inscrivere successivamente i poligoni regolari di 8, di 16, di 32, di 64 lati ecc.

Dall'esagono derivano i poligoni regolari di 12, di 24, di 48, di 96 lati ecc.

Il decagono darà i poligoni regolari di 20, di 40, di 80 lati ecc.

Ed il pentedecagono darà quelli di 30, di 60, di 120 lati ecc.

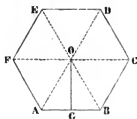
Tutti questi poligoni potranno anche circoscriversi al circolo.

Scolio 2.° Si è per lungo tempo creduto che i poligoni regolari delle quattro mentovate serie potessero solo inscriversi nel circolo con metodi geometrici: ma il sig. Gauss geometra tedesco ha dimostrato, per una via che non può trovar luogo in questi Elementi, che si può ancora inscrivere il poligono regolare di 17 lati, e generalmente ogni poligono che abbia un numero di lati compreso nella formola 2^n+1, purchè questo sia *numero primo.*

Proposizione VII. — *Teorema.*

L'area di un poligono regolare è eguale al prodotto del suo perimetro per la metà del suo apotema *o* cateto (fig. 148).

Fig. 148.

E D O F C A G B

Dimostrazione. Tirinsi i raggi a tutti gli angoli del poligono; i triangoli isosceli risultanti AOB, BOC, COD ecc., avendo tutti

l'altezza eguale al cateto OG, la loro somma, ossia il poligono intero, avrà manifestamente per misura

$$\mathrm{AB}\times\frac{1}{2}\mathrm{OG}+\mathrm{BC}\times\frac{1}{2}\mathrm{OG}+\mathrm{CD}\times\frac{1}{2}\mathrm{OG}+\ \text{ecc.}$$

ossia

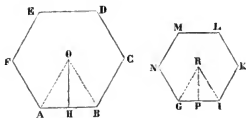
$$\left(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DE}+\mathrm{EF}+\mathrm{FA}\right)\times\frac{1}{2}\mathrm{OG};$$

cioè tutto il perimetro moltiplicato per la metà dell'apotema; oppure la metà del prodotto del perimetro per l'apotema.

Scolio. L'area di qualsivoglia poligono circoscritto ad un circolo è eguale alla metà del prodotto del suo perimetro pel raggio del circolo cui è circoscritto, come si è già notato pel caso particolare del triangolo (prop. 19, lib. 4).

Proposizione VIII. — *Teorema.*

Due poligoni regolari di egual numero di lati sono figure simili (fig. 149).

Fig. 149.

Dimostrazione. Siano ABCDEF, GIKLMN i due poligoni dati: 1.° questi poligoni hanno gli angoli rispettivamente eguali,

giacchè ciascun angolo dell'uno e dell'altro poligono è la stessa parte dello stesso numero di angoli retti; 2° essi hanno i lati visibilmente proporzionali, poichè tutti i lati del primo poligono sono eguali tra loro, ed i lati del secondo sono parimente eguali tra loro.

Corollario. Dunque i perimetri di due poligoni regolari di egual numero di lati stanno fra loro come i lati omologhi; e le loro superficie stanno come i quadrati di questi medesimi lati (prop. 20, lib. 3).

Proposizione IX. — *Teorema.*

I perimetri dei poligoni regolari dello stesso numero di lati stanno fra loro come i raggi dei circoli inscritti, o circoscritti; e le loro aree *stanno come i quadrati di questi medesimi raggi* (fig. 149).

Dimostrazione. 1.° Pel corollario della proposizione precedente si ha

$$\text{Perim. ABCD..} : \text{perim. GIKL..} :: AB:GI;$$

ma per cagione de'triangoli simili AOB, GRI, nei quali AO, GR, sono i raggi de' circoli circoscritti, ed OH, RP sono quelli de' circoli inscritti, si ha pure

$$AB:GI::AO:GR::OH:RP;$$

dunque starà perim. ABCD.. al perim. GIKL.. come AO sta al GR, oppure come OH al RP.

2.° Dalla proporzione

$$\text{area ABCD....} : \text{area GIKL...}::\overline{AB}^2:\overline{GI}^2$$

risulta anche

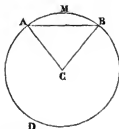
area ABCD... : area GIKL... :: $\overline{AO}^2 : \overline{GR}^2 :: \overline{OH}^2 : \overline{RP}^2$.

Scolio. Le proprietà de' poligoni regolari dimostrate ne' tre teoremi precedenti sono indipendenti dal numero de' lati: se poi si concepisce che si vada successivamente raddoppiando il numero dei lati di due poligoni regolari l'uno inscritto, l'altro circoscritto al circolo, i perimetri di questi poligoni si verranno continuamente accostando alla circonferenza del circolo, la quale sarà il limite comune, verso cui entrambi tenderanno: si può dunque considerare il circolo come un poligono regolare di una infinità di lati infinitamente piccoli; onde:

1°. *Ogni circolo ha per misura la metà del prodotto della sua circonferenza (rettificata)* pel suo raggio.

2°. *Ogni settore circolare ha per misura la metà del prodotto del* suo arco *(rettificato)* pel suo raggio.

3°. *L'area del segmento* ABM (fig. 150) *minore del semicircolo si ottiene sottraendo l'area del triangolo* ACB *da quella del settore* CAMB*: e l'area di un segmento* ABD *maggiore del semicircolo si ottiene sommando le aree del settore corrispondente* CADB *e del triangolo* ACB.

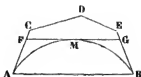
Fig. 150.

4°. *Due circonferenze di circolo stanno fra di loro come i loro raggi.*

5°. *Due circoli stanno fra loro come i quadrati de' loro raggi.*

6°. *Gli archi simili stanno fra loro come i loro raggi ed i settori simili stanno come i quadrati de' loro raggi: perchè gli archi simili ed i settori simili corrispondendo ad angoli al centro eguali, gli archi staranno come le circonferenze intere, e per conseguenza come i loro raggi; ed i settori staranno fra loro come i circoli interi di cui fanno parte, e per conseguenza come i quadrati dei raggi.*

Proposizione X. — *Lemma.*

Se due linee curve o poligone, od una curva e l'altra poligona, convesse dalla stessa parte, sono terminate alle estremità di una stessa retta AB, *la linea interiore è più corta della linea esteriore che la comprende* (fig. 151).

Fig. 151.

Dimostrazione. Chiamasi *poligona* una linea formata di più rette unite ad angolo a guisa di una porzione del perimetro di un poligono: dicesi poi *convessa* una tal linea quando non può essere incontrata da una retta in più di due punti, e non ha per conseguenza alcun angolo *rientrante.*

Ciò posto, sia AMB una linea curva o poligona; se questa non è più corta di tutte quelle che la comprendono, vi esisterà tra queste ultime una linea più corta di tutte le altre, che sarà più

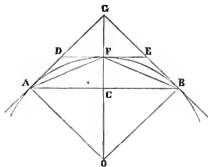
corta di AMB o al più eguale ad AMB; sia ACDEB questa linea: tirisi tra le due linee la retta FG, che non incontri AMB, oppure che la tocchi solamente; la retta FG essendo più corta di FCDEG, la nuova linea AFGB sarà più corta di ACDEB; ma per ipotesi ACDEB dee essere la più corta di tutte; dunque quest'ipotesi non può sussistere; dunque la linea AMB è più corta di tutte quelle che la comprendono.

Corollario. La circonferenza del circolo è minore del perimetro di qualunque poligono circoscritto, ed è nello stesso tempo maggiore del perimetro di qualunque poligono inscritto.

Proposizione XI. — *Problema.*

Trovare il valore prossimo della ragione di una circonferenza di circolo al suo diametro.

Risoluzione. Sia AB (fig. 152) un lato di un poligono rego-

Fig. 152.

lare inscritto, ed AG, GB due mezzi lati del poligono simile circoscritto: dividendo l'arco AB per mezzo in F, e tirando le corde AF, FB, e pel punto F la tangente DE, per una parte la somma

delle corde AF ed FB sarà maggiore del lato AB, e minore dell'arco corrispondente, e per altra parte la linea poligona ADEB sarà minore della linea poligona AGB e maggiore dell'arco AB; ripetendo la medesima costruzione ed i medesimi ragionamenti su ciascun lato dei poligoni inscritto e circoscritto, si conchiuderà che col raddoppiare il numero di questi lati, le lunghezze de'perimetri dei due poligoni si faranno più prossime a quella della circonferenza del circolo, e saranno sempre l'una minore e l'altra maggiore di questa circonferenza.

Raddoppiando adunque più volte il numero dei lati, e calcolando le lunghezze dei perimetri simili inscritti e circoscritti, finchè se ne incontrino due uno inscritto e l'altro circoscritto che non differiscano tra loro se non che nelle parti decimali che si vogliono trascurare, allora i due perimetri così ottenuti potranno considerarsi come sensibilmente eguali, sarà permesso di prendere l'uno o l'altro perimetro, o la semisomma de'loro due valori per la lunghezza della circonferenza.

Di qui deriva la maniera di *rettificare* la circonferenza del circolo; ossia di trovare il valor prossimo della ragione della circonferenza al diametro, la quale è la stessa in tutti i circoli, giacchè, chiamando C, C' due circonferenze, e D, D' i loro rispettivi diametri, si ha la proporzione C:C'::D:D' (scolio della proposizione 9), da cui risulta C:D::C':D'.

Scolio 1°. Se si indica con π la ragione della circonferenza al diametro, o ciò che è lo stesso, la circonferenza di un circolo il cui diametro $=1$ e se si chiama C la circonferenza di un circolo, ed R, il suo raggio, si avrà

$$C=2\pi R \text{ ed } R=\frac{C}{2\pi}$$

Col mezzo di queste formole si può calcolare la circonferenza C di un circolo, quando il raggio sia conosciuto, oppure il raggio R, quando la circonferenza sia data.

Scolio 2°. Inscrivendo e circoscrivendo successivamente

al circolo i poligoni regolari di 6, di 12, di 24, di 48, e di 96 lati, e calcolando le lunghezze dei loro perimetri, trovò Archimede, che il valor prossimo della ragione π è

$$3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7},$$

o più esattamente che il valore di π è compreso tra

$$3+\frac{10}{70} \text{ e } 3+\frac{10}{71}.$$

Altri hanno poi trovati valori più prossimi di questa ragione medesima: così Mezio pervenne alla frazione $\frac{355}{113}$, che può facilmente ritenersi a memoria, poichè essa si ottiene spartendo in due gruppi di 3 cifre il numero 113355, e che valutata in decimali dà un risultato esatto sino alla sesta cifra decimale, mentre quella di Archimede è solamente esatta sino ai centesimi.

Finalmente, col mezzo di altri metodi, si è spinto il calcolo del valore di π sino a 140 cifre decimali: limitandosi alle 20 prime cifre decimali, si ha

$$\pi=3,\ 14159\ 26535\ 89793\ 23846.$$

(Veggansi in fine di questo 5°. libro i problemi 6° e 7°).

Proposizione XII. — *Teorema.*

L'area di un circolo è eguale al prodotto del quadrato del suo raggio pel numero π, ossia per la ragione della circonferenza al diametro.

Dimostrazione. Infatti sia R il raggio, C la circonferenza, ed A l'area di un circolo, sarà (scolio della prop. 9) $A=C\times\frac{R}{2}$; ma $C=2\pi R$ (scolio della prop. 11), dunque $A=2\pi R\times\frac{R}{2}=\pi R^2$.

Corollario 1°. Il problema della quadratura del circolo, che consiste nel trovare un quadrato eguale in area ad un circolo di raggio dato, si riduce a trovare la ragione della circonferenza al diametro; e si avrebbe la vera quadratura del circolo, se questa ragione potesse determinarsi esattamente.

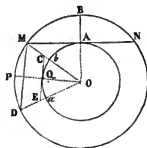
Corollario 2°. Se coi tre lati di un triangolo rettangolo presi per raggi o diametri si descrivono tre circoli, il circolo descritto sull'ipotenusa sarà eguale alla somma degli altri due; ed il circolo descritto sopra un cateto sarà eguale alla differenza de'due circoli descritti sull'ipotenusa e sull'altro cateto.

Corollario 3°. Si potranno trovare due rette che stieno tra loro nella stessa ragione delle aree di due circoli dati, poichè questa ragione è quella stessa dei quadrati fatti sui loro raggi o sui loro diametri.

Corollario 4°. Essendo data numericamente l'area di un circolo, si troverà il suo raggio eguagliando la formola πR^2 al numero che esprime l'area del circolo, e ricavando il valore di R da questa equazione: così, per esempio, se l'area di un circolo è di 3850 metri quadrati, e si dimandi il suo raggio, si farà $\pi R^2=3850$, e si avrà $R^2=\frac{3850}{\pi}$; quindi $R=\sqrt{\frac{3850}{\pi}}$; prendendo $\pi=\frac{22}{7}$, si troverà $R=35$ metri.

Proposizione XIII. — *Teorema.*

La corona circolare compresa tra due circonferenze concentriche OA, OB *è equivalente ad un circolo, che abbia per diametro una corda* MN *della circonferenza esteriore, tangente alla circonferenza interiore* (fig. 153).

Fig. 153.

Dimostrazione. L'area della corona è manifestamente eguale alla differenza de'due circoli $\pi\left(\overline{OB}^2-\overline{OA}^2\right)$;

$$\text{ma } \overline{OB}^2-\overline{OA}^2=\overline{OM}^2-\overline{OA}^2=\overline{AM}^2;$$

dunque l'area della corona sarà $\pi\overline{AM}^2$; essa è dunque equivalente ad un circolo di raggio AM, o di un diametro $=$MN.

La stessa corona è anche equivalente ad un trapezio che abbia per basi le due circonferenze rettificate, e per altezza la

differenza de' due raggi: la dimostrazione si troverà facilmente.

Similmente la parte di corona D*ab*M compresa tra due raggi OD, OM, ossia la differenza di due settori simili DOM, *a*O*b*, è anch'essa equivalente ad un trapezio, che abbia per basi gli archi DM, *ab* rettificati, e per altezza la differenza de' due raggi.

Problemi relativi al Libro V.

I. *Sopra una circonferenza di un raggio dato, quanti gradi abbraccierà un filo di lunghezza data.*

Sia R il raggio del circolo ed A la lunghezza del filo: poichè la circonferenza intiera contiene 360 gradi, si avrà la proporzione:

$$2\pi R : A :: 360^\circ : x = \frac{180^\circ A}{\pi R};$$

così quando R ed A sieno dati in numeri, il quoziente indicherà il numero cercato de' gradi.

Se la lunghezza del filo fosse eguale al raggio, si avrebbe

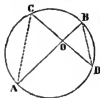
$$2\pi R : R :: 360^\circ : x = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Prendendo il numero π con 6 decimali, oppure servendosi del valore di Mezio, e facendo la divisione, si troverà 57° 17′ 45″ pel numero de' gradi contenuti in un arco di lunghezza eguale al raggio.

Moltiplicando quest'ultimo numero per la lunghezza di un arco espresso in parti del raggio, si otterrà il numero de' gradi contenuti in quest' arco.

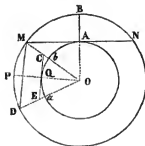
II. *Dato il raggio di un circolo e le lunghezze di due archi*

AD, BC (fig. 154) *compresi fra le estremità di due corde, che si tagliano, determinare l'angolo* AOD *delle due corde.*

Fig. 154.

Sieno R il raggio del circolo, ed a, b le lunghezze de'due archi; quella dell'arco che serve di misura all'angolo AOD sarà $\frac{a+b}{2}$, ed il numero x de'gradi contenuti in quest'arco si avrà dalla proporzione

$$2\pi R : \frac{a+b}{2} :: 360^\circ : x = \frac{90^\circ(a+b)}{\pi R}.$$

III. *Data la ragione dei raggi* OD, Oa, *e quella de'due angoli* DOB, aOb (fig. 155), *determinare la ragione delle lunghezze de'due archi* DB, ab.

Fig. 155..

Supponendo gli archi ridotti allo stesso centro O, ed i raggi

OD, Oa e nella stessa direzione, prolungando Ob in M, si avrà

$$DB:DM::DOB:DOM=aOb,$$

$$\text{e } DM:ab::OD:Oa,$$

$$\text{onde } DB:ab::DOB\times OD:aOb\times Oa.$$

Così la ragione de'due archi è eguale alla ragione composta delle due ragioni degli angoli e dei raggi.

Dall'ultima proporzione, dividendo gli antecedenti per OD, ed i conseguenti per Oa, risulta ancora

$$DOB:aOb::\frac{DB}{OD}:\frac{ab}{Oa}:$$

Cioè la ragione di due angoli al centro di circoli diversi è eguale a quella dei quozienti degli archi corrispondenti divisi pei rispettivi raggi.

IV. *Sopra una data retta costrurre un poligono regolare di un dato numero di lati.*

In un circolo di raggio arbitrario s'inscriva un poligono regolare della specie data; quindi si formi sulla retta o lato dato un poligono simile; questo sarà il poligono cercato.

Il problema potrebbe pure risolversi per mezzo sia dell'angolo al perimetro, sia dell'angolo al centro del poligono: ma tutte e tre queste costruzioni suppongono, che il poligono domandato si sappia inscrivere nel circolo, cioè che esso appartenga ad una delle serie considerate nella proposizione VI di questo Libro: qualora esso non sia compreso in alcuna di quelle serie, si risolverà il problema per approssimazione, dividendo per via di tentativi la circonferenza del circolo assunto in tante parti eguali, quanti sono i lati del poligono domandato.

V. *Essendo data l'area di un esagono regolare, eguale a 3456 metri quadrati, trovare il suo lato.*

Sia a il lato dell'esagono, il suo apotema sarà $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, e la sua area sarà eguale a

$$6a\times\frac{1}{4}a\sqrt{3}=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3};$$

si avrà dunque l'equazione

$$\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}=3456^{m.q.};$$

dalla quale si ricava

$$a^2=\frac{2}{9}.3456\sqrt{3}=768\sqrt{3}=1330,21;$$

e finalmente

$$a=36^m,47.$$

VI. *Dato il lato di un poligono regolare inscritto, trovare il lato del poligono inscritto di doppio numero di lati; o più generalmente: data la corda di un arco, trovare la corda della metà di questo medesimo arco* (fig. 156).

Sia $AB=a$ la corda data; $AF=a'$ la corda cercata; ed $AO=r$ il raggio del circolo.

Essendo AF media proporzionale tra $2r$ e CF, sarà $(a')^2=2r\times CF$; ma

$$CF=r-OC=r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}};$$

dunque

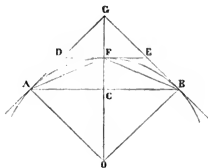
$$(a')^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right) = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2};$$

onde

$$a' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}};$$

e supponendo il raggio $r = 1$, si avrà

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

Fig. 156.

Sia per esempio a il lato dell'esagono regolare inscritto, onde $a = 1$: sarà a' il lato del dodecagono regolare inscritto e si avrà

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,51763809.$$

Se si volesse ora calcolare il lato del poligono di 24 lati,

chiamando a'' questo lato, se n'avrebbe manifestamente il valore mettendo nella formola generale a' in luogo di a, onde

$$a''=\sqrt{2-\sqrt{4-a'^2}}=0,26105238.$$

Similmente chiamando a''', a^{IV}, ecc. i lati de'poligoni regolari inscritti di 48, di 96 ecc. lati, si trovano

$$a'''=\sqrt{2-\sqrt{4-a''^2}}=0,13080626$$

$$a^{IV}=\sqrt{2-\sqrt{4-a'''^2}}=0,06543817$$

ecc.

Moltiplicando poi il valore del lato pel numero de' lati del poligono cui esso appartiene, si avrà il valore dell' intero perimetro: così saranno

il perimetro dell'esagono	= $6a$	=	6,0000000
quello del poligono di 12 lati . .	= $12a'$	=	6,2116571
. . . .	$24a''$	=	6,2652572
. . . .	$48a'''$	=	6,2787004
. . . .	$96a^{IV}$	=	6,2820639
	ecc.		

VII. *Dato il perimetro di un poligono regolare inscritto in un circolo cognito, trovare il perimetro del poligono simile circoscritto.*

I due poligoni che si considerano essendo sempre simili, i loro perimetri sono proporzionali ai loro apotemi: ma l'apotema

di qualsivoglia poligono circoscritto è eguale al raggio del circolo, e l'apotema del poligono inscritto è

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-a^2},$$

r essendo il raggio del circolo ed a il lato del poligono: facendo dunque $r=1$, sarà l'apotema

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2};$$

e se si denota per A il lato del poligono simile circoscritto, si avrà

$$\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}:1::a:A=\frac{2a}{\sqrt{4-a^2}}:$$

siano per esempio A, A', A'', A''', A$^{\text{IV}}$ ecc. i lati de' poligoni circoscritti di 6, di 12, di 24, di 48, di 96 ecc. lati: se ne otterranno i valori, se in quello di A si metteranno successivamente

$$a,\ a'\ a''\ a'''\ a^{\text{IV}}\ \text{ecc.}:$$

moltiplicando poi questi valori per 6, per 12, per 24, ecc. rispettivamente si avrà pei perimetri de' poligoni corrispondenti circoscritti i valori che seguono:

Perimetro dell'esagono circoscritto

$$6A=6\times\frac{2}{\sqrt{3}}=6{,}9282032,$$

Perimetro circoscritto di 12 lati

$$12\,A'=12\times\frac{2a'}{\sqrt{4-a'^2}}=6{,}4307806,$$

$$24\,A'' = 24 \times \frac{2a''}{\sqrt{4-a''^2}} = 6{,}3193199,$$

$$48\,A''' = 48 \times \frac{2a'''}{\sqrt{4-a'''^2}} = 6{,}2921724,$$

$$96\,A^{\text{IV}} = 96 \times \frac{2a^{\text{IV}}}{\sqrt{4-a^{\text{IV}2}}} = 6{,}2854292,$$

ecc.

quindi si vede, che la circonferenza del circolo di raggio eguale alla unità, la quale è compresa tra i perimetri de' poligoni di 96 lati l'uno inscritto e l'altro circoscritto, è maggiore di

$$96a^{\text{IV}} = 6{,}2820\ldots\text{, e minore di } 96A^{\text{IV}} = 6{,}2854\ldots;$$

onde limitando l'approssimazione a due sole cifre decimali, questa circonferenza sarà espressa dal numero 6,28: se si volesse averne l'espressione esatta sino alla sesta cifra decimale inclusivamente, bisognerebbe proseguire il calcolo sino ad ottenere i lati a^{XI} ed A^{XI} de'poligoni inscritto e circoscritto di 12288 lati.

LIBRO SESTO

Piani e linee rette considerate nello spazio: angoli diedri ed angoli solidi.

Definizioni.

I. Una retta dicesi perpendicolare ad un piano quando essa è perpendicolare a tutte le rette che passano per il suo piede nel piano: *viceversa* il piano sarà perpendicolare alla retta.

Il punto, in cui la retta incontra il piano, chiamasi il piede della perpendicolare.

II. Una retta dicesi obliqua ad un piano, quando fa angoli diseguali con le rette condotte pel suo piede nel piano.

III. Una retta AB (fig. 157) dicesi parallela ad un piano MN, quando essa non può incontrarlo, a qualunque distanza si prolunghino l'una e l'altro: in tal caso il piano sarà parallelo alla retta.

IV. Similmente due piani diconsi paralleli tra loro, quando

prolungati indefinitamente l'uno e l'altro, non possono incontrarsi.

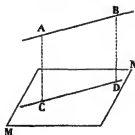
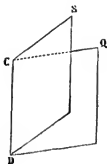
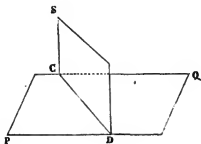
Fig. 157.

V. Lo spazio (fig. 158) indefinito compreso fra due piani SD, DQ, che s'incontrano, chiamasi angolo diedro, cioè angolo a due facce.

Fig. 158.

La comune intersezione CD de'due piani chiamasi il vertice, o spigolo dell'angolo diedro, ed i due piani SD, DQ ne sono le due facce.

Generalmente per designare un angolo diedro di una figura si adoprano quattro lettere SCDQ, delle quali le due di mezzo

son poste sullo spigolo dell'angolo; bastano queste due lettere, se lo spigolo cui sono poste non è comune ad altri angoli.

VI. Un piano SCD (fig. 159) dicesi perpendicolare ad un altro piano PQ, quando forma con questo i due angoli diedri adiacenti SCDP, SCDQ eguali tra loro. Ciascuno de'due diedri eguali SCDP, SCDQ chiamasi diedro retto, un diedro maggiore di un retto chiamasi ottuso, ed un diedro minore di un retto chiamasi acuto.

Fig. 159.

VII. Lo spazio indefinito, compreso da tre o più angoli piani, che si riuniscano in un medesimo punto, chiamasi *angolo solido*, o angolo *poliedro*, cioè angolo di più facce.

Il punto dove si riuniscano tutti i vertici degli angoli piani, che comprendono l'angolo solido, dicesi vertice.

Gli angoli solidi si distinguono dal numero delle loro facce; e si dice angolo *triedro*, *tetraedro*, o *pentaedro* ecc., secondo che esso ha tre, quattro o cinque facce ecc.

Scolio preliminare. Dalla definizione del piano risulta, che una linea retta è tutta contenuta in un piano, se essa ha due de'suoi punti comuni con questo piano.

Onde una retta non può incontrare un piano che in un

solo punto; poichè se lo incontrasse in due, essa sarebbe tutta nel piano.

È chiaro che per una data retta può passare un'infinità di piani.

Per due rette AB, BC (fig. 160) che s'incontrano, può passare un solo piano; perchè facendo girare uno dei piani passanti per AB attorno alla stessa retta finchè passi per un punto C della seconda retta BC, questa avendo allora due dei suoi punti B, C nel piano, vi sarà tutta intera, ed il piano passante per le due rette sarà unico.

Fig. 160.

Similmente per tre punti A, B, C, che non sieno in linea retta, può passare un solo piano, che sarà quello del triangolo determinato dai tre punti.

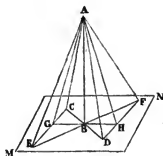
Per due rette parallele, secondo la loro definizione, può sempre passare un piano, e questo piano sarà unico.

Dunque due rette che s'incontrano, o due rette parallele, un triangolo, o tre punti che non sieno in linea retta, determinano sempre la posizione di un piano nello spazio.

L'intersezione comune di due piani è una linea retta; perchè se due piani avessero tre punti comuni, che non fossero in linea retta, si confonderebbero insieme, e formerebbero un solo piano.

Proposizione I. — *Teorema.*

Se una retta AB (fig. 161) *è perpendicolare a due rette* CD, EF *tirate per il suo piede* B *nel piano* M N, *essa sarà perpendicolare a qualunque altra retta* GH *condotta nel piano pel punto* B, *e per conseguenza sarà perpendicolare al piano.*

Fig. 161.

Dimostrazione. Prendendo BE=BF; BC=BD, e tirando le rette CE, DF si dimostra facilmente CE=DF, BG=BH, e CG=DH.

Quindi tirando dal punto A le rette AC, AD, AE, AF, AG, AH, sarà anche AC=AD, AE=AF come ipotenuse di triangoli rettangoli eguali; epperò i triangoli ACE, ADF hanno i tre lati rispettivamente eguali; dunque sarà l'angolo ACE=ADF.

Ora nei triangoli ACG, ADH essendo il lato AC=AD, CG=DH, e l'angolo ACG=ADH, sarà anche il lato AG=AH.

Finalmente nei triangoli ABG, ABH, il lato AG=AH, BG=BH, ed il lato AB è comune; dunque sarà l'angolo ABG =ABH; epperò la retta AB sarà perpendicolare alla retta GH, e per conseguenza perpendicolare al piano MN (def. 1).

Corollario 1°. Se tre rette BD, BH, BF sono perpendicolari

nello stesso punto B ad una stessa retta AB, queste tre rette saranno in un medesimo piano perpendicolare alla retta AB; perchè due delle tre rette BD e BF determinano un piano perpendicolare alla retta AB: ora se questo piano non contenesse la terza retta BH, il piano ABH taglierebbe quello delle due rette BD, BF secondo un'altra linea diversa da BH, la quale sarebbe ancora perpendicolare alla retta AB; e si avrebbero allora nello stesso piano ABH, e nello stesso punto B, due perpendicolari ad una stessa retta AB, ciò che è impossibile.

Corollario 2°. Da un punto dato in un piano si può alzare una sola perpendicolare al piano; e da un punto dato fuori di un piano, si può parimente abbassare una sola perpendicolare al dato piano.

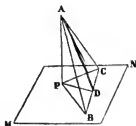
Corollario 3°. Fra tutte le rette che si possono condurre da un punto dato A ad un piano dato MN, la più breve è la perpendicolare AB; epperò essa sarà la vera misura della distanza del punto al piano.

Le oblique sono tanto più lunghe, quanto più si allontanano dal piede della perpendicolare: le oblique eguali sono equidistanti dalla perpendicolare; e *viceversa*.

Quindi siegue ancora, che il piede B della perpendicolare AB è il centro di un circolo, che si descriverebbe sopra il piano MN dal punto A come centro, e con un raggio maggiore di AB; questa proprietà porge il mezzo di abbassare sopra un piano una perpendicolare da un punto dato fuori di questo piano; per questo basterà segnare sopra il piano tre punti egualmente distanti dal punto dato fuori, e cercare il centro del circolo passante per questi tre punti; questo centro sarà il piede della perpendicolare dimandata.

Proposizione II. — *Teorema.*

Sia la retta AP (fig. 162) *una perpendicolare al piano* MN, *e* AD *un'obliqua allo stesso piano: se si uniscono i piedi* P, D, *e pel punto* D *si tira nel piano* MN *la retta* BC *perpendicolare alla* PD, *la retta* BC *sarà anche perpendicolare all'obliqua* AD.

Fig. 162.

Dimostrazione. Prendasi DB=DC; risulterà PB=PC; e quindi AB=AC, come ipotenuse di triangoli rettangoli eguali; dunque i due triangoli ADB, ADC avendo i loro lati rispettivamente eguali, avranno anche l'angolo ADB=ADC; epperò la retta BC sarà perpendicolare alla retta AD obliqua al piano MN.

Corollario. La retta BC perpendicolare alle due rette PD, AD, che determinano il piano ADP, sarà anche perpendicolare a questo piano.

Scolio. L'angolo ADP si prende per misura dell'inclinazione dell'obliqua AD sul piano MN.

Le due linee AP, BC porgono l'esempio di due rette, le quali non essendo poste in un medesimo piano non possono incontrarsi tuttochè non sieno parallele. La più breve distanza di queste rette è la loro perpendicolare comune PD; perchè con-

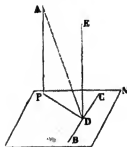
giungendo due altri punti, per es. A con B, si avrà AB>AD, AD>PD; dunque con maggior ragione AB>PD.

Le due rette AP, BC quantunque non sieno poste in un medesimo piano, si considerano tuttavia come formanti tra loro un angolo retto; perchè se dal punto P si tira nel piano MN una parallela a BC, questa parallela fa con AP un angolo retto.

Similmente l'angolo delle due rette AB, PD che non sono nel medesimo piano, si riguarderà come eguale a quello della retta AB con una parallela a PD condotta per qualsivoglia punto della AB.

Proposizione III. — *Teorema.*

Se una retta AP (fig. 163) *è perpendicolare ad un piano* MN, *qualunque altra retta* DE *parallela ad* AP *sarà anche perpendicolare allo stesso piano.*

Fig. 163.

Dimostrazione. Le due rette parallele AP, DE determinano un piano APDE, che taglia il piano dato MN secondo la retta PD; e la retta PD perpendicolare ad AP, sarà anche perpendicolare alla sua parallela DE; si tiri AD, e pel punto D si conduca nel piano MN la retta BC perpendicolare alla PD, essa sarà pure perpendicolare alla retta AD (prop. 2), e per conseguenza per-

pendicolare al piano APDE, ed alla retta DE (prop. 1); dunque la retta DE perpendicolare alle due rette PD, BC condotte nel piano MN, sarà perpendicolare a questo piano.

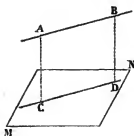
Corollario 1°. Viceversa. Se due rette AP, DE sono perpendicolari ad uno stesso piano MN; esse saranno parallele.

Perchè se DE non fosse parallela ad AP, si potrebbe allora dal punto D condurre un'altra retta parallela ad AP, e questa retta sarebbe anche perpendicolare al piano MN (dim. ant.); epperò si avrebbero due perpendicolari ad un medesimo piano MN, alzate da uno stesso punto D, ciò che è impossibile; dunque le due perpendicolari AP, DE, e più generalmente tutte le perpendicolari ad un medesimo piano sono fra loro parallele.

Corollario 2°. Due rette A, B parallele ad una terza C sono parallele tra loro, tuttochè non cadano nello stesso piano con la C: infatti, condotto un piano perpendicolare alla C, le A, B, siccome ad essa parallele, saranno perpendicolari a questo stesso piano, e per conseguenza parallele tra loro.

PROPOSIZIONE IV. — *Teorema.*

Se una retta AB (fig. 164), *posta fuori di un piano* MN, *è*

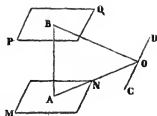
Fig. 164.

parallela ad una retta CD *condotta nel piano*, *essa sarà anche parallela al piano* MN.

Dimostrazione. Se la retta AB, situata nel piano ABCD, potesse incontrare il piano MN, quest'incontro non potrebbe aver luogo se non che in qualche punto della retta CD, comune *intersezione* de'due piani; ma AB non può incontrare la sua parallela CD; dunque essa non potrà incontrare il piano MN, e per conseguenza AB sarà parallela a questo piano.

Corollario. Per un punto dato C si ponno condurre infiniti piani tutti paralleli alla retta data AB, poichè tirata CD parallela ad AB, qualunque piano che passi per CD sarà pure parallelo ad AB.

PROPOSIZIONE V. — *Teorema*.

Due piani MN, PQ (fig. 165) *perpendicolari ad una stessa retta* AB *sono paralleli.*

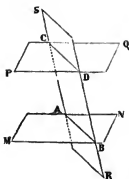
Fig. 165.

Dimostrazione Se i due piani MN, PQ s'incontrassero in una retta CD, da un punto qualunque O della loro comune *intersezione*, tirando due rette OA, OB nei rispettivi piani, il triangolo risultante ABO avrebbe due angoli retti in A e B: ciò che è impossibile; dunque i due piani MN, PQ non ponno incontrarsi, e sono per conseguenza paralleli.

Corollario. Quando due piani sono paralleli, ogni retta condotta in uno di essi è parallela all'altro piano; epperò da un

punto dato fuori di un piano si potrà condurre un'infinità di rette parallele al piano dato.

PROPOSIZIONE VI. — *Teorema.*

Le intersezioni AB, CD *di due piani paralleli*, MN, PQ *tagliati da un terzo piano* RS, *sono parallele fra loro* (fig. 166).

Fig. 166.

Dimostrazione. Se le due rette AB, CD poste ne'piani MN, PQ s'incontrassero, anche questi due piani s'incontrerebbero e non sarebbero quindi paralleli; dunque le due rette AB, CD, contenute entrambe nel piano RS, non ponno incontrarsi, e sono per conseguenza parallele.

Corollario 1°. Due rette AC, BD parallele e comprese tra due piani paralleli son eguali: perchè il piano delle due parallele AC, BD incontrando i due piani paralleli secondo le intersezioni AB, CD, che sono anche parallele, il quadrilatero ABDC sarà un parallelogrammo; per conseguenza AC=BD.

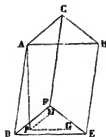
Corollario 2°. Due piani paralleli hanno le loro perpendicolari comuni: perchè se i due angoli BAC, NAC fossero retti,

per cagione delle parallele AB e CD, AN e CQ, sarebbero anche retti i due angoli DCA, QCA; dunque AC perpendicolare al piano MN sarebbe anche perpendicolare al piano PQ parallelo con MN.

Corollario 3°. Due piani paralleli sono dappertutto equidistanti: perchè se AC, BD sono perpendicolari ai due piani MN, PQ, esse saranno parallele tra loro, e per conseguenza eguali.

PROPOSIZIONE VII. — *Teorema.*

Se due angoli BAC, EDF *posti in piani diversi hanno i loro lati paralleli e diretti nello stesso verso, questi due angoli sono eguali, ed i loro piani sono paralleli* (fig. 167).

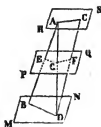
Fig. 167.

Dimostrazione 1°. Sia il lato AB parallelo con DE, ed AC con DF: prendasi AB=DE, AC=DF, e si tirino le rette AD, BE, CF, CB, FE; i quadrilateri ADEB, ADFC sono entrambi parallellogrammi, perchè ciascuno di essi ha due lati opposti eguali e paralleli; dunque BE e CF sono eguali e paralleli ad AD, e per conseguenza eguali e paralleli tra loro; perciò BC=EF; i due triangoli ABC, DEF sono dunque eguali, e l'angolo BAC=EDF.

2°. Dal punto A si abbassi la perpendicolare AP sul piano dell'angolo EDF, e si tirino le rette PG, PH rispettivamente parallele a DE, DF, esse saranno ancora rispettivamente parallele ad AB, AC (prop. 3, cor. 2); dunque gli angoli PAB, PAC saranno retti, come gli angoli APG, APH; epperò i due piani BAC, EDF sono perpendicolari ad una stessa retta AP; dunque essi saranno paralleli (prop. 5).

Corollario. Se tre rette AD, BE, CF, non poste in un medesimo piano, sono eguali, e parallele, i triangoli ABC, DEF determinati dalle loro estremità sono eguali, ed i loro piani sono paralleli.

Proposizione VIII. — *Teorema.*

Due rette qualunque AB, CD (fig. 168) *comprese tra due piani paralleli* MN, RS, *sono tagliate in parti proporzionali da un terzo piano* PQ *parallelo ai due primi.*

Fig. 168.

Dimostrazione. Si tiri la retta AD, e si uniscano con le rette AC, BD, EG, GF i punti in cui le rette incontrano i tre piani; le intersezioni EG, BD dei piani PQ, MN col piano ABD sono parallele; similmente le intersezioni AC, GF dei piani RS, PQ col piano ADC sono parallele: dunque nel triangolo ABD sarà

$$AG:GD::AE:EB;$$

e nel triangolo ADC sarà

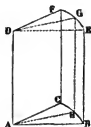
$$AG:GD::CF:FD;$$

dalle quali risulta

$$AE:EB::CF:FD.$$

PROPOSIZIONE IX. — *Teorema.*

Ogni angolo diedro BADF (fig. 169) *ha per misura l'angolo rettilineo* BAC *o* EDF *formato da due rette condotte in ciascuna delle sue facce perpendicolarmente alla loro comune intersezione* AD, *e da un medesimo punto preso ad arbitrio sopra questa retta.*

Fig. 169.

Dimostrazione. 1°. In uno stesso angolo diedro, l'angolo piano BAC, o EDF è sempre della stessa grandezza, da qualunque punto della comune intersezione AD sieno tirate le perpendicolari nei due piani; poichè le perpendicolari AB, DE ecc. tirate nel piano ADE sono parallele fra loro, e le perpendico-

lari AC, DF tirate nel piano ADF sono anche parallele fra loro; dunque l'angolo BAC=EDF (prop. 7).

2°. L'angolo diedro cresce o diminuisce nella stessa ragione che l'angolo piano corrispondente; infatti scorgesi per così dire ad occhio veggente, e può anche facilmente dimostrarsi a tutto rigore, che se l'angolo piano BAC sarà eguale al doppio, al triplo, ecc. dell'angolo BAH, anche l'angolo diedro BADF sarà eguale al doppio, al triplo, ecc. dell'angolo diedro BADG; dunque l'angolo piano BAC, o EDF è la misura dell'angolo diedro BADF.

Scolio. Se l'angolo piano BAC diventasse retto, l'angolo diedro corrispondente BADF diverrebbe parimente retto, ed allora il piano ADF sarebbe perpendicolare al piano ADE.

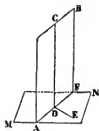
Quindi risulta che le proprietà degli angoli piani fatti da linee rette che si tagliano, convengono anche agli angoli diedri fatti dai piani che s'incontrano nello spazio.

Onde, quando due piani si tagliano scambievolmente, 1° gli angoli diedri opposti al vertice sono eguali; 2° gli angoli diedri adiacenti sono eguali a due retti, ecc.

E quando due piani paralleli sono tagliati da un terzo piano, 1°. gli angoli diedri alterni interni sono eguali; 2° gli angoli diedri corrispondenti sono eguali; 3° i due angoli diedri interni dalla stessa parte del piano segante, presi insieme sono eguali a due retti, ecc.

PROPOSIZIONE X. — *Teorema.*

Se una retta CD (fig. 170) *è perpendicolare ad un piano* MN, *qualunque piano* AB, *condotto per* CD, *sarà perpendicolare al piano* MN.

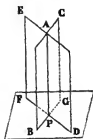
Fig. 170.

Dimostrazione. Nel piano MN si tiri la retta DE perpendicolare in un punto qualunque D alla intersezione AF dei due piani: l'angolo retto CDE è la misura dell'angolo diedro BAFN; dunque quest'angolo sarà retto, ed il piano AB sarà perpendicolare al piano MN.

Corollario 1°. Quando tre rette, come DC, DE, DF, sono perpendicolari fra loro, ciascuna di esse è perpendicolare al piano delle altre due, ed i tre piani sono perpendicolari tra di loro.

Corollario 2°. La retta DE perpendicolare alle due rette AF, DC, è anche perpendicolare al piano AB. Dunque quando due piani AB, MN sono perpendicolari tra loro, ogni retta DE condotta in uno di essi perpendicolarmente alla loro comune intersezione, è perpendicolare all'altro piano; ed ogni perpendicolare ad uno dei due piani in un punto della loro comune intersezione sarà tutta posta nell'altro piano.

Proposizione XI. — *Teorema.*

La comune intersezione AP *di due piani* BC, DE *perpendicolari ad un terzo piano* MN, *è anch'essa perpendicolare al terzo piano* (fig. 171).

Fig. 171.

Dimostrazione. Infatti, se dal punto P si alza una perpendicolare al piano MN, questa perpendicolare sarà nello stesso tempo contenuta nel piano BC e nel piano DE (prop. ant., cor. 2); dunque essa si confonderà alla comune intersezione AP; perciò AP sarà perpendicolare al piano MN.

Proposizione XII. — *Teorema.*

Se un angolo solido S (fig. 172) *è formato da tre angoli piani, la somma di due qualunque di questi angoli è sempre maggiore del terzo.*

Dimostrazione. La proposizione è evidente, quando i tre angoli piani sono eguali.

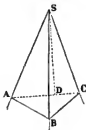
Si suppongano dunque disuguali; e sia ASC il maggiore dei tre angoli piani, dico che sarà ancora $ASB+BSC>ASC$.

Nel piano ASC si faccia l'angolo ASD=ASB, e tirisi una retta qualunque ADC; quindi si prenda SB=SD, e si tirino le rette AB, BC: nei triangoli ASB, ASD il lato SA è comune, SB=SD, e l'angolo ASB=ASD; dunque sarà AB=AD; ma nel triangolo ABC si ha AB+BC>AD+DC; e levando da una parte AB, e dall'altra AD, che sono eguali, resterà BC>DC; ora nei triangoli BSC, DSC essendo il lato SC comune, SB=SD, e BC>DC, sarà l'angolo BSC>DSC (prop. 8, lib. I); ed aggiungendo ad una parte ASB ed all'altra il suo eguale ASD, si avrà

$$ASB+BSC>ASD+DSC,$$

ossia

$$ASB+BSC>ASC.$$

Fig. 172.

Corollario. Da questa ineguaglianza si ricavano le due seguenti

$$ASB>ASC-BSC,$$

$$BSC>ASC-ASB:$$

d'altronde essendo ASC per ipotesi maggiore di ciascuno degli angoli ASB e BSC, sarà *a fortiori*

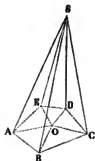
$$ASC>ASB-BSC:$$

dunque in qualsivoglia angolo triedro, la differenza di due degli angoli piani che lo formano è sempre minore del terzo.

Scolio. In qualsivoglia angolo solido poliedro, uno qualunque de' suoi angoli piani è necessariamente minore della somma di tutti gli altri.

PROPOSIZIONE XIII. — *Teorema.*

La somma degli angoli piani che compongono un angolo solido convesso, ossia a spigoli salienti, è sempre minore di quattro angoli retti (fig. 173).

Fig. 173.

Dimostrazione. Si chiuda l'angolo solido S con un piano ABCDE, e da un punto qualunque O preso nell'interno del poligono si tirino le rette OA, OB, OC, OD, OE a tutti gli angoli.

La somma degli angoli de' triangoli ASB, BSC, ecc. che hanno il vertice in S, è eguale alla somma degli angoli de' triangoli AOB, BOC, ecc. fatti nel poligono e col vertice in O; ma nel punto B gli angoli ABO+OBC fanno l'angolo ABC minore della somma ABS+SBC (prop. ant.); similmente nel punto C si ha

$$BCO+OCD<BCS+SCD;$$

e così per tutti gli angoli del poligono ABCDE.

Onde segue che nei triangoli aventi il vertice in O, la somma degli angoli alle basi è minore della somma degli angoli alle basi dei triangoli aventi il vertice in S; dunque, per compensazione, la somma degli angoli fatti al punto O è maggiore della somma degli angoli intorno al punto S. Ma la somma degli angoli intorno al punto O è eguale a quattro angoli retti; dunque la somma degli angoli piani, che formano l'angolo solido S, è minore di quattro angoli retti.

Scolio. 1°. Se l'angolo solido avesse spigoli rientranti, la somma degli angoli piani che lo compongono potrebbe crescere oltre ogni limite.

Corollario. Dai due ultimi teoremi si raccoglie, che per poter formare un angolo solido convesso con un dato numero di angoli piani, si richieggono due condizioni: cioè 1° che uno qualunque degli angoli piani dati sia minore della somma di tutti gli altri; 2° che la somma di tutti questi angoli sia minore di quattro angoli retti.

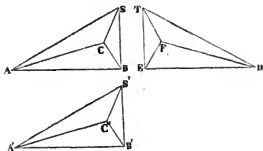
Scolio 2°. L'angolo del triangolo equilatero è di 60°, onde si scorge, che unendo insieme tre, o quattro o cinque angoli piani eguali a quello del triangolo equilatero si formeranno tre angoli solidi: l'uno triedro, il secondo tetraedro, il terzo pentaedro; nè possono formarsene altri, poichè sei angoli di 60° eguagliando quattro angoli retti, già più non ponno formare un angolo solido.

Si vedrà similmente senza difficoltà, che con angoli piani eguali a quelli del quadrato, cioè retti, si può formare un solo angolo solido, cioè un angolo triedro; che con angoli piani eguali a quelli del pentagono regolare, cioè di 108°, si può similmente formare un solo angolo solido triedro; e finalmente che con angoli piani eguali a quello dell'esagono regolare, cioè di 120°, nè con angoli piani eguali a quelli di un poligono regolare di più di sei lati non si può formare alcun angolo solido. Onde si conchiuderà, che con angoli piani eguali tra loro ed eguali a quelli di alcuno dei poligoni regolari potranno solamente formarsi cinque angoli solidi diversi: cioè tre

triedri con angoli di 60°, di 90°, o di 108°; uno *tetraedro* con angoli di 60°; ed uno *pentaedro* parimente con angoli di 60°.

PROPOSIZIONE XIV. — *Teorema.*

Se due angoli solidi triedri S, T (fig. 174) *sono formati da tre angoli piani eguali ciascuno a ciascuno, gli angoli diedri compresi tra gli angoli piani eguali, saranno eguali tra loro.*

Fig. 174.

Dimostrazione. Sia ASB=DTE, ASC=DTF, BSC=ETF: sugli spigoli, che uniscono due angoli piani rispettivamente eguali, prendasi SB=TE, e pei punti B, E s' immaginino condotti i piani BAC, EDF rispettivamente perpendicolari agli spigoli SB, TE; i triangoli BSA, BSC rettangoli in B sono eguali ai triangoli ETD, ETF rettangoli in E, perchè hanno di più i lati SB, e TE eguali, e gli angoli BSA=ETD, BSC=ETF; dunque sarà SA=TD, SC=TF, AB=DE, BC=EF; ma essendo l'angolo ASC=DTF, i triangoli ASC, DTF saranno eguali, e daranno AC=DF.

Finalmente i tre lati dei triangoli ABC, DEF essendo rispettivamente eguali, gli angoli ABC, DEF saranno pure eguali,

ma questi angoli misurano gli angoli diedri fatti dai piani BSA e BSC, ETD ed ETF; dunque l'angolo diedro SB=TE.

Facendo la stessa costruzione sugli altri spigoli SA e TD, SC e TF, si dimostra medesimamente che l'angolo diedro SA=TD, e l'angolo diedro SC=TF. Dunque quando due angoli triedri hanno i loro angoli piani eguali, avranno pure gli angoli diedri eguali, ed essi saranno eguali in tutte le loro parti costituenti.

Proposizione XV. — *Teorema.*

Se due angoli triedri SABC, S'A'B'C' (fig. 174) *sono formati da tre angoli piani rispettivamente eguali e similmente disposti, essi saranno eguali e* sovrapponibili.

Dimostrazione. Sovrapponendo la faccia A'S'B' alla sua eguale ASB in modo che lo spigolo S'A' cada sopra SA, S'B' cadrà sopra SB; le facce eguali ASC, e A'S'C', BSC, e B'S'C' essendo egualmente inclinate sulle precedenti (prop. ant.), si adatteranno perfettamente insieme; ed essendo l'angolo A'S'C'=ASC, B'S'C'=BSC, i due spigoli S'C', SC coincideranno insieme, ed i due angoli triedri si confonderanno parimente insieme e saranno eguali.

Scolio. La sovrapposizione e la successiva *coincidenza* di due angoli triedri avrà solamente luogo quando gli angoli piani eguali sono disposti nella stessa maniera nell'uno e nell'altro angolo solido, come nei due angoli S, S'; ma questa *coincidenza* non potrà più aver luogo tra due angoli triedri, che hanno gli angoli piani eguali disposti in un ordine inverso, come nei due angoli S, T.

Tuttavia questi angoli, come si è dimostrato (prop. ant.), essendo eguali in tutte le loro parti constituenti, non si può dubitare della loro eguaglianza: quest'eguaglianza dee distinguersi da quella che risulta dalla sovrapposizione: essa si chiama eguaglianza per simmetria; e gli angoli stessi così formati si chiamano *simmetrici*; perchè applicando una faccia di uno di essi sulla faccia eguale dell'altro, per es. ETF su BSC, i due

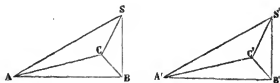
angoli saranno simmetricamente posti da una parte e dall'altra del piano comune di combaciamento, ed occuperanno manifestamente spazi eguali dalle due parti di questo piano

Corollario 1°. Due angoli triedri sono eguali quando hanno i loro spigoli paralleli, ciascuno a ciascuno, e diretti nello stesso senso (prop. 7).

Corollario 2°. Due angoli triedri sono simmetrici tra loro, quando hanno i loro spigoli paralleli, e diretti in senso contrario ciascuno a ciascuno: infatti prolungando gli spigoli di un angolo triedro qualunque al di là del suo vertice, risulterà un secondo angolo triedro opposto al vertice col primo, che avrà i suoi angoli piani rispettivamente eguali agli angoli piani del primo, ma disposti in un ordine inverso; poichè lo spigolo, che era per es. superiore al piano de' due altri nel primo angolo triedro, passerà sotto questo piano nel secondo, e così gli angoli piani eguali dei due angoli triedri saranno inversamente disposti, e per conseguenza i due angoli triedri opposti al vertice saranno simmetrici.

PROPOSIZIONE XVI. — *Teorema.*

Due angoli triedri S, S' (fig. 175) *sono eguali, quando hanno un angolo diedro eguale* SA=S'A', *compreso tra due facce eguali ciascuna a ciascuna, e similmente disposte.*

Fig. 175.

Dimostrazione. Applicando la faccia A'S'B' sulla faccia eguale ASB in modo che S'A' sia sopra SA, e S'B' sopra SB, gli an-

goli diedri SA e S'A' essendo eguali, la faccia A'S'C' cadrà sul piano della faccia ASC; e siccome queste due facce sono eguali, lo spigolo S'C' si confonderà collo spigolo SC, e la faccia B'S'C' coprirà la faccia BSC: onde i due angoli triedri si confonderanno in uno, e saranno eguali.

Proposizione XVII. — *Teorema.*

Due angoli triedri sono eguali, quando hanno una faccia eguale adiacente a due angoli diedri eguali ciascuno a ciascuno, e similmente disposti.

Si dimostra medesimamente questo teorema come i due precedenti, col mezzo della sovrapposizione.

LIBRO SETTIMO.

Solidi poliedri, ossia corpi terminati da piani.

Definizioni.

I. Chiamasi *solido poliedro*, o solamente *poliedro*, qualsivoglia corpo o spazio terminato da tutte le parti da piani, o facce piane. Questi piani sono necessariamente terminati essi stessi da linee rette.

Richiedonsi almeno quattro piani per terminare uno spazio da tutte le parti.

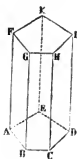
Il solido terminato da quattro facce dicesi *tetraedro*; e chiamasi *esaedro* il solido di sei facce; *ottaedro* quello di otto; *dodecaedro* quello di dodici; *icosaedro* quello di venti facce.

II. L'intersezione comune di due facce adiacenti di un *poliedro* si chiama *lato* o *spigolo* del poliedro.

III. Chiamasi *prisma*, un *poliedro* compreso da due facce opposte che sono due poligoni eguali e paralleli, e lateralmente da tanti parallelogrammi, quanti sono i lati di ciascun poligono.

La fig. 176 rappresenta un prisma. I due poligoni eguali e paralleli ABCDE, FGHIK si chiamano le basi del prisma; le altre facce parallelogramme formano la superficie *laterale* del prisma. Le rette eguali AF, BG, CH ecc., si chiamano lati o spigoli laterali del prisma.

Dicesi altezza di un prisma la distanza delle sue due basi, o la perpendicolare abbassata da un punto qualunque della base superiore sopra il piano della base inferiore.

Fig. 176.

Un prisma chiamasi retto, quando i lati AF, BG ecc. sono perpendicolari ai piani delle basi: allora ciascun lato è eguale all'altezza del prisma: in tutti gli altri casi il prisma è obliquo, e la sua altezza è minore del suo lato.

Un prisma dicesi triangolare, quadrangolare, pentagonale ecc., secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono ecc.

Un prisma dicesi *regolare* quando è retto, e le sue basi sono poligoni regolari: in questo caso le facce laterali sono rettangoli eguali; e la linea, che unisce i centri delle basi, chiamasi asse del prisma.

IV. Quando le basi del prisma sono due parallelogrammi, il prisma prende il nome di *parallelepipedo*.

Il parallelepipedo chiamasi rettangolo, quando tutte le sue facce sono parallelogrammi rettangoli.

Notisi la distinzione tra il parallelepipedo retto, ed il parallelepipedo rettangolo; nel primo le quattro facce laterali sole sono

rettangole, e le due basi sono due parallelogrammi qualunque, mentre nel secondo sono rettangole anche le basi.

V. Tra i parallelepipedi rettangoli si dee distinguere il *cubo* ossia l'*esaedro regolare*, terminato da sei quadrati eguali.

VI. *Piramide* (fig. 177) è un *poliedro* compreso da facce triangolari che concorrono coi loro vertici in un medesimo punto S, e formano con le loro basi il perimetro di un poligono qualunque ABCDE che chiude il poliedro.

Fig. 177.

Il poligono ABCDE è la base della piramide; il punto S ne è il vertice; il complesso delle facce triangolari che concorrono nel vertice forma la superficie laterale della piramide.

Chiamasi altezza della piramide la perpendicolare SP abbassata dal vertice sul piano della base, prolungato se è necessario.

La piramide dicesi triangolare, quadrangolare, pentagona ecc., secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, o un pentagono ecc.

La piramide triangolare è identicamente lo stesso solido che si è chiamato tetraedro: e ciascuna delle sue quattro facce può esser presa per base.

VII. Piramide *regolare* è quella che ha per base un poligono regolare, ed in cui la perpendicolare calata dal vertice cade nel centro della base; questa perpendicolare si chiama allora asse della piramide.

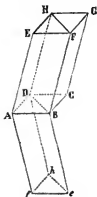
Nella piramide regolare le facce laterali sono triangoli isosceli eguali tra loro; l'altezza comune di questi triangoli o facce eguali si chiama *cateto* o apotema della piramide.

VIII. *Diagonale* di un poliedro è una retta qualunque, che unisce i vertici di due angoli solidi non adiacenti ad una stessa faccia.

I prismi triangolari, nè le piramidi di qualsivoglia numero di facce non hanno diagonali: i parallelepipedi ed i prismi quadrangolari ne hanno quattro ecc.

IX. Chiamansi poliedri simmetrici, due poliedri, i quali avendo una base comune, sono similmente posti uno da una parte e l'altro dall'altra di questa base; in modo che i vertici degli angoli solidi compresi da angoli piani eguali, sieno posti a egual distanza dal piano della base comune, e sopra una stessa retta perpendicolare a questo piano.

Tali sono i due prismi triangolari (fig. 178) ABDEFH,

Fig. 178.

ed ABD*feh* addossati alla base comune ABD, qualora le rette

E*f*, F*e*, H*h* sieno perpendicolari al piano della base ABD, e divise per mezzo da questo stesso piano.

X. Due poliedri terminati da uno stesso numero di facce simili ciascuna a ciascuna, similmente disposte ed egualmente inclinate tra loro, sono simili.

XI. Un *poliedro* dicesi *regolare*, quando tutte le sue facce sono poligoni regolari eguali, e tutti gli angoli solidi sono parimente eguali.

Da questa definizione, e dallo scolio della prop. 13 del lib. 6, risulta che non possono darsi più di cinque specie di poliedri regolari: e le costruzioni geometriche dimostrano vera la esistenza di queste cinque specie, le quali sono

Il *tetraedro regolare*, terminato da quattro triangoli equilateri eguali, cogli angoli solidi *triedri*.

L'*ottaedro regolare*, terminato da otto triangoli equilateri eguali cogli angoli solidi *tetraedri*.

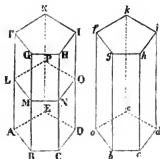
L'*icosaedro regolare*, terminato da venti triangoli equilateri eguali, cogli angoli solidi *pentaedri*.

L'*esaedro regolare*, ossia il cubo, terminato da sei quadrati eguali, cogli angoli solidi *triedri*.

Il *dodecaedro regolare*, terminato da dodici pentagoni regolari eguali, cogli angoli solidi *triedri*.

PROPOSIZIONE I. — *Teorema.*

Due prismi sono eguali, quando hanno un angolo solido compreso da facce eguali ciascuna a ciascuna, e similmente disposte. (fig. 179).

Fig. 179.

Dimostrazione. Sia la base ABCDE=*abcde*, la faccia ABGF=*abgf*, ed AEKF=*aekf*; portando la base *abcde* sopra la sua eguale ABCDE, esse si adatteranno perfettamente insieme, ed i due angoli solidi A, *a* essendo compresi da angoli piani eguali e similmente disposti, coincideranno pure insieme; dunque lo spigolo *af* cadrà sul suo eguale AF, la faccia *ag* sopra AG, ed *ak* sopra AK, e così di tutte le altre facce e spigoli; dunque i due prismi si confonderanno in un solo, e saranno per conseguenza eguali.

La base, la lunghezza e la posizione di uno spigolo laterale bastano per determinare un prisma; giacchè tutti gli altri spigoli laterali debbono essere paralleli ed eguali al dato.

Corollario. Due prismi retti, che hanno le basi eguali e le altezze eguali, sono eguali.

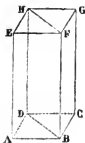
Scolio. Qualunque sezione LMNOP, fatta in un prisma da un piano parallelo alla sua base, è un poligono eguale alla base

stessa; perchè per cagione del parallelismo dei due piani ABC.., LMN.., e degli spigoli laterali, si ha LM=AB, MN=BC, NO=CD ecc., e l'angolo LMN=ABC, MNO=BCD ecc.; dunque il poligono LMNOP=ABCDE.

Un piano parallelo alla base taglia il prisma in due segmenti ALO, LOK, che sono ancora due prismi: se il piano segante non fosse parallelo alla base, i due segmenti sarebbero due tronchi di prisma a basi non parallele.

Proposizione II. — *Teorema.*

In ogni parallelepipedo le facce opposte sono eguali e parallele (fig. 180).

Fig. 180.

Dimostrazione. Secondo la definizione le due basi opposte AC, EG sono eguali e parallele: si considerino adunque le facce laterali AF, DG; si avrà DC eguale e parallelo ad AB; similmente DH eguale e parallelo ad AE; dunque gli angoli CDH, BAE sono eguali e paralleli (prop. 7, lib. 6), come anche i due parallelogrammi AF, DG. Si dimostra medesimamente che le facce AH,BG sono eguali e parallele.

Corollario. Quindi segue, potersi prendere, per basi del parallelepipedo, una qualunque delle sei facce, e la sua opposta.

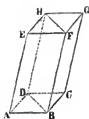
Scolio 1°. Gli spigoli di un parallelepipedo sono eguali quattro a quattro, e ciascun angolo triedro è formato da tre spigoli adiacenti, che sono generalmente di lunghezza diversa in uno stesso angolo triedro, ma sempre eguali ciascuno a ciascuno in due angoli triedri qualunque dello stesso parallelepipedo.

Un parallelepipedo è interamente determinato quando si conoscono le lunghezze e le direzioni dei tre spigoli che concorrono in uno de'suoi angoli solidi.

2°. In ogni parallelepipedo le sezioni fatte da piani che incontrano quattro spigoli paralleli sono parallelogrammi (prop. 6, lib. 6); e quando il piano segante è perpendicolare agli spigoli, gli angoli della sezione misurano gli angoli diedri fatti dalle facce adiacenti due a due; onde in ogni parallelepipedo gli angoli diedri opposti sono eguali.

Proposizione III. — *Teorema.*

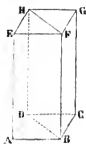
In ogni parallelepipedo gli angoli solidi opposti sono simmetrici; e le quattro diagonali si tagliano scambievolmente per mezzo in uno stesso punto (fig. 181).

Fig. 181.

Dimostrazione. Infatti 1°. Due angoli solidi opposti hanno i loro spigoli paralleli e volti in parti contrarie: dunque essi sono simmetrici (lib. 6, prop. 15).

2°. Se s'intendono condotte le due diagonali DF, BH del parallelepipedo, esse si taglieranno in parti eguali, perchè sono diagonali del parallelogramma BDHF; similmente le diagonali BH, AG del parallelepipedo essendo insieme diagonali del parallelogramma ABGH, esse si taglieranno pure in parti eguali; onde AG taglierà BH nel medesimo punto in cui quest'ultima è tagliata da DF; nello stesso modo si vedrà, che anche la quarta diagonale CE passa pel medesimo punto. Dunque le quattro diagonali si tagliano per mezzo in uno stesso punto, che potrà considerarsi come il centro del parallelepipedo.

Proposizione IV. — *Teorema.*

Nel parallelepipedo rettangolo, le quattro diagonali sono eguali; ed il quadrato di una di esse è eguale alla somma dei quadrati dei tre spigoli adiacenti, o formanti uno stesso angolo triedro (fig. 182).

Fig. 182.

Dimostrazione. 1°. Le due diagonali AC, BD della base rettangola sono eguali; i quattro spigoli laterali sono parimente eguali; ma ciascuna diagonale del parallelepipedo rettangolo, per es. BH, è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per

cateti una diagonale BD della base, ed uno spigolo laterale DH; dunque le quattro diagonali sono eguali.

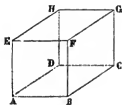
2°. Supponendo tirata la diagonale BH, il triangolo BDH rettangolo in D darà

$$\overline{BH}^2=\overline{BD}^2+\overline{DH}^2;\ \text{ma}\ \overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2,\ \text{e}\ \overline{DH}^2=\overline{AE}^2;$$

dunque sarà

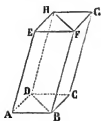
$$\overline{BH}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{AE}^2.$$

Corollario. Quindi nel cubo (fig. 183) sarà $\overline{BH}^2=3\overline{AB}^2$,

Fig. 183.

ossia $BH=AB\sqrt{3}$; e prendendo per unità il lato del cubo risulterà $BH=\sqrt{3}$.

Proposizione V. — *Teorema.*

Il piano BDHF *passante per due spigoli paralleli ed opposti* BF, DH, *divide il parallelepipedo* AG *in due prismi triangolari* ABDEFH, BCDFGH *eguali* o *per soprapposizione*, o *per* simmetria (fig. 184).

Fig. 184.

Dimostrazione. I due prismi ABDEFH, BCDFGH sono terminati ciascuno da cinque facce rispettivamente eguali, ed egualmente inclinate fra loro; giacchè ABD=BCD, EFH=FGH, ADHE=BCGF, ABFE=DCGH, e la faccia BDHF è comune; di più l'angolo diedro AE=CG, l'angolo ADHF=CBFH come alterni interni, e l'angolo ABFH=BDHG per la stessa ragione ecc.; dunque pare potersi conchiudere che i due prismi sono eguali, e per conseguenza che ciascuno di essi è la metà del parallelepipedo.

Questa conseguenza è vera, ma non è geometricamente dedotta.

Infatti, i due prismi triangolari possono solamente soprapporsi e coincidere insieme nel caso in cui il parallelepipedo, di cui fanno parte, è retto, come nella fig. 185; in questo caso, separando i due prismi, e portando la base del secondo BCD sulla base del primo DAB, i due spigoli CG, AE essendo perpendicolari alla base in uno stesso punto A, si confonderanno in-

sieme, e così i due prismi coincideranno, e saranno perfettamente eguali.

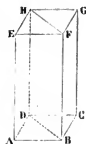
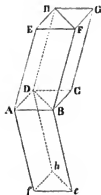
Fig. 185.

Ma quando il parallelepipedo è obbliquo (fig. 186), non si potrà stabilire la soprapposizione dei due prismi, perchè i loro

Fig. 186.

angoli solidi essendo simmetrici due a due non possono coincidere insieme; ma adattando la base superiore FGH del secondo alla base inferiore DAB del primo, il secondo prisma prenderà la posizione rappresentata da ABD*feh*, ed i due prismi sono allora posti da ambe le parti del piano della loro base comune, in

modo che le rette Ef, Hh, Fe, le quali uniscono i vertici degli angoli solidi omologhi, sono perpendicolari al piano della base comune, e divise per mezzo da questo stesso piano: i due prismi sono dunque simmetrici, ed occuperanno manifestamente spazi equivalenti dalle due parti del piano della loro base.

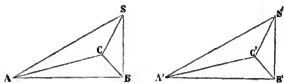
Scolio. Si può anche dimostrare a tutto rigore la vera equivalenza di questi prismi simmetrici; ma non si crede necessario di esporne qui la dimostrazione, perchè l'equivalenza dedotta dalla simmetria pare bastantemente evidente.

Corollario. Un prisma triangolare qualunque ABDEFH è la metà di un parallelepipedo AG fatto sopra una base ABCD doppia di quella del prisma e colla medesima altezza.

PROPOSIZIONE VI. — *Teorema.*

Due tetraedri *o due piramidi triangolari* S, S' (fig. 187) *sono eguali, quando hanno tre facce eguali ciascuna a ciascuna, e similmente disposte*; *cioè*

$$SAB = S'A'B',\ SAC = S'A'C',\ SBC = S'B'C'.$$

Fig. 187.

Dimostrazione. Secondo l'ipotesi, gli angoli triedri S e S' sono eguali (prop. 15, lib. 6) e *sovrapponibili*; stabilita la coincidenza dei due angoli triedri, le tre facce rispettivamente eguali

si confonderanno insieme, e la quarta faccia A'B'C' si confonderà pure colla faccia ABC: dunque i due *tetraedri* sono eguali.

Corollario. Due tetraedri sono eguali, quando hanno i loro sei spigoli rispettivamente eguali, e riuniti nello stesso modo.

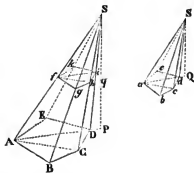
Scolio. Si dimostrano medesimamente le due proposizioni seguenti:

1ª *Due piramidi triangolari* S, S' *sono eguali, quando hanno due facce eguali ciascuna a ciascuna, similmente disposte, ed egualmente inclinate tra loro: cioè* SAB=S'A'B', SAC=S'A'C' *e l'angolo diedro* SA=S'A'.

2ª *Due piramidi triangolari sono eguali, quando hanno una faccia eguale* SAB=S'A'B', *e gli angoli diedri adiacenti eguali ciascuno a ciascuno, e similmente disposti; cioè l'angolo diedro* SA=S'A', SB=S'B', *e* AB=A'B'.

PROPOSIZIONE VII. — *Teorema.*

Se le tre facce che concorrono nell'angolo triedro f della piramide Sfghik (fig. 188) *sono rispettivamente eguali alle tre facce che concorrono nell'angolo triedro a della piramide* Sabcde, *e se queste facce sono similmente disposte, le due piramidi sono eguali.*

Fig. 188.

Dimostrazione. Infatti soprapponendo la base *abcde* alla sua

eguale *fghik*, i due angoli triedri *a*, *f* coincideranno insieme, lo spigolo *aS* si confonderà collo spigolo *fS* e la piramide *Sabcde* colla piramide *Sfghik*; dunque le due piramidi sono eguali.

Due piramidi sono ancora eguali, quando hanno la base ed una faccia eguali ciascuna a ciascuna, egualmente inclinate, e similmente disposte; per esempio la base *abcde* eguale alla base *fghik*, la faccia S*ab* eguale alla faccia S*fg*, e l'angolo diedro *ab* eguale all'angolo diedro S*fgi*, perchè sovrapponendo la base *abcde* alla base *fghik*, le due piramidi coincidono manifestamente insieme.

La dimostrazione è la stessa.

Proposizione VIII. — *Teorema.*

Se una piramide qualunque SABCDE (fig. 189) *viene tagliata da un piano parallelo alla sua base:*

1°. *La sezione fghik è un poligono simile alla base* ABCDE;

2°. *La piccola piramide recisa Sfghik è simile alla piramide intera* SABCDE;

3°. *L'altezza* SP *e gli spigoli laterali* SA, SB *ecc. sono tagliati in parti proporzionali.*

Dimostrazione 1.° I lati della sezione *fg*, *gh*, *hi* ecc. sono rispettivamente paralleli ai lati della base AB, BC, CD ecc., (prop. 6, lib. 6); dunque gli angoli della sezione *f*, *g*, *h* ecc. sono rispettivamente eguali agli angoli della base A, B, C ecc.: di più essendo

$$SB:Sg::AB:fg$$

ed

$$SB:Sg::BC:gh,$$

risulterà

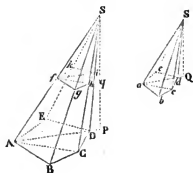
$$AB:fg::BC:gh::CD:hi::\text{ ecc.},$$

dunque la sezione *fghik* sarà simile alla base ABCDE.

2.° Le due piramidi SABCDE, *Sfghik* sono terminate da facce simili e similmente disposte; dunque esse sono simili.

3.° Se pel punto S s'immagina condotto un piano parallelo alla base ABCDE, la terza parte del teorema risulterà dalla prop. 8, lib. 6.

Scolio. Sieno due piramidi simili SABCDE, *Sabcde:* se sul lato SA si prende una parte S*f* eguale al lato omologo S*a*, e pel punto *f* si faccia passare un piano *fghik* parallelo alla base ABCDE, le due piramidi S*fghik*, S*abcde* saranno eguali; infatti si dimostrerà facilmente che la base *fghik* è eguale alla base *abcde*, la faccia S*fg* è eguale alla faccia S*ab*, e l'angolo diedro S*fgi* è eguale all'angolo diedro *ab*, giacchè questi due angoli sono entrambi eguali all'angolo diedro AB; dunque le due piramidi ponno sovrapporsi; e sono per conseguenza eguali.

Fig. 189.

PROPOSIZIONE IX. — *Teorema.*

In due piramidi simili SABCDE, S*abcde* (fig. 189): 1.° *Gli spigoli omologhi sono proporzionali tra loro, ed alle altezze delle*

piramidi; 2.° *Le basi* ABCDE, *abcde e tutte le facce omologhe stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi, o come i quadrati delle altezze.*

Dimostrazione. 1.° Le facce delle due piramidi essendo simili ciascuna a ciascuna si avrà

$$AB:ab::AS:as::BS:bs:: \text{ ecc.}$$

Ma (prop. ant.) si ha anche

$$BS:gS::SP:Sq, \text{ ed è } gS=bS, \text{ e } Sq=SQ,$$

dunque sarà

$$AB:ab::BS:bs::SP:SQ,$$

2.° Le basi ABCDE, *abcde* essendo simili, danno la proporzione

$$ABCDE:abcde::\overline{AB}^2:\overline{ab}^2,$$

dunque (dim. ant.) sarà anche

$$ABCDE:abcde::\overline{SP}^2:\overline{SQ}^2,$$

ed anche

$$SAB:Sab::\overline{SP}^2:\overline{SQ}^2, \text{ ecc.}$$

Corollario. In due piramidi diverse SABC, SABCDE (figura 190), di eguale altezza $SO=SP$, le sezioni HIK, *fghik* fatte parallelamente alle basi, ed alla stessa

distanza dai vertici, stanno fra loro come le basi stesse; perchè si ha

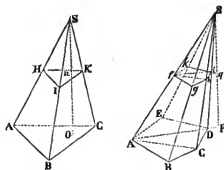
$$ABC : HIK :: \overline{SO}^2 : \overline{Sn}^2,$$

e

$$ABCDE : fghik :: \overline{SP}^2 : \overline{Sq}^2;$$

ma, per ipotesi, $SO = SP$, e $Sn = Sq$; dunque

$$ABC : ABCDE :: HIK : fghik.$$

Fig. 190.

Se le basi ABC, ABCDE fossero equivalenti, le sezioni fatte a egual distanza dai vertici sarebbero anche equivalenti.

Proposizione X. — *Teorema.*

Nei poliedri simili, gli spigoli omologhi sono proporzionali tra loro.

Dimostrazione. In due facce simili, i lati sono evidentemente proporzionali: ma le facce simili due a due, sono in ciascun poliedro due a due adiacenti ad un lato comune; dunque

la ragione tra due lati omologhi delle facce simili è la stessa in tutte queste facce; dunque gli spigoli omologhi dei poliedri simili sono proporzionali tra loro.

Proposizione XI. — *Teorema.*

Le superficie di due poliedri simili stanno fra loro come i quadrati dei loro spigoli omologhi.

Dimostrazione. Le facce dei due poliedri essendo simili due a due, staranno tra loro come i quadrati dei loro lati omologhi; ma questi lati o spigoli essendo tutti proporzionali, i loro quadrati formeranno due a due ragioni eguali; dunque le facce sono due a due nella medesima ragione; epperò la somma delle facce del primo poliedro starà alla somma delle facce del secondo, come una faccia qualunque del primo sta alla faccia simile del secondo, o come il quadrato di uno spigolo del primo sta al quadrato dello spigolo omologo del secondo. Dunque le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati dei loro spigoli omologhi.

Scolio. La superficie di un poliedro essendo eguale alla somma delle aree delle diverse facce, da cui esso è terminato, si potrà agevolmente calcolare secondo le regole esposte nelle proposizioni V, VI, VII, VIII del lib. 2; per riguardo a questo soggetto si noteranno alcune proposizioni, che possono considerarsi come altrettanti corollari delle proposizioni qui sopra citate.

I. *La superficie laterale di un prisma retto ha per misura il prodotto del perimetro della sua base pel suo spigolo laterale.*

II. *La superficie totale di un prisma* regolare (*le basi comprese) ha per misura il prodotto del perimetro della sua base per la somma di uno spigolo e dell'apotema della base.*

III. *La superficie laterale di un prisma obliquo ha per misura il prodotto del perimetro di una sezione perpendicolare agli spigoli laterali per la loro lunghezza comune.*

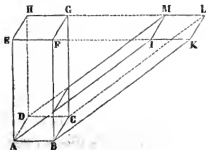
IV. *La superficie laterale di una piramide regolare ha per misura la metà del prodotto del perimetro della sua base per l'apotema della piramide.*

V. *La superficie totale di una piramide regolare (compresa la base) ha per misura la metà del prodotto del perimetro della sua base per la somma dei due apotemi della piramide e della base.*

Proposizione XII. — *Teorema.*

Due parellelepipedi di egual base e di eguale altezza sono equivalenti.

Dimostrazione. Sieno i due parallelepipedi AG, AL (fig. 191) posti sulla stessa base ABCD, e lateralmente compresi tra due

Fig. 191.

piani paralleli ABKE, DCLH: questi parallelepipedi avendo per ipotesi eguali altezze, le basi superiori EG, IL cadranno in uno

stesso piano parallelo alla base inferiore, ed i lati EF, HG saranno in linea retta coi lati IK, LM; ciò posto, i due prismi triangolari AEIDHM, BFKCGL sono eguali, perchè avendo le basi eguali e gli spigoli eguali e paralleli, si possono sovrapporre in tutte le loro parti (prop. 1).

Ma se da tutto il solido ABKEDCLH si toglie il prisma AEIDHM, rimarrà il parallelepipedo AL, e se dallo stesso solido si toglie il prisma BFKCGL, rimarrà il parallelepipedo AG; dunque i due parallelepipedi AG, AL sono equivalenti.

2.° Se i due parallelepipedi di egual base e di eguale altezza non sono lateralmente compresi tra due piani paralleli, come AP, AG (fig. 192), allora prolungando i lati delle basi superiori ON e PQ, HE e GF finchè s'incontrino in I, K, L, M, e tirando le rette AI, BK, CL, DM, si formerà un terzo parallelepipedo AL equivalente a ciascuno dei due primi (dim. ant.); dunque i due parallelepipedi AP, AG, entrambi equivalenti al terzo AL, sono equivalenti tra loro.

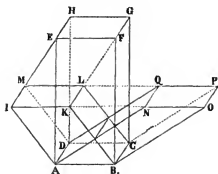



Fig. 192.

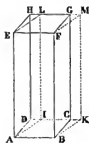
H G E F M L Q P I K N O D C A B.

PROPOSIZIONE XIII. — *Teorema.*

Un parallelepipedo qualunque è sempre equivalente ad un parallelepipedo rettangolo della stessa altezza, e di base equivalente.

Dimostrazione. 1.° Ogni parallelepipedo obliquo AP (fig. 192) è equivalente ad un parallelepipedo retto AG della stessa base ed altezza.

2.° Ogni parallelepipedo retto ABKIEFLM (fig. 193) è pure sempre equivalente ad un parallelepipedo rettangolo ABCDEFGH

Fig. 193.

della stessa altezza, e di base rettangola ABCD equivalente alla base ABKI. Infatti se si prende per base dei due parallelepipedi la faccia comune AF, essi hanno la stessa altezza AD.

Proposizione XIV. — *Teorema.*

Due parallelepipedi rettangoli AG, AL (fig. 194) *della stessa base* ABCD, *stanno fra loro come le loro altezze* AE, AI.

Fig. 194.

Dimostrazione. Suppongasi primieramente che le altezze AE, AI sieno fra loro come due numeri interi, per es. 15:8; dividendo AE in 15 parti eguali, AI conterrà 8 di queste stesse parti; e per tutti i punti di divisione della retta AE immaginando condotti tanti piani paralleli alla base ABCD, il parallelepipedo AG sarà così diviso in 15 piccoli parallelepipedi eguali, ed il parallelepipedo AL conterrà 8 di questi stessi parallelepipedi; dunque si avrà

$$AG:AL::15:8,$$

ossia

$$AG:AL::AE:AI.$$

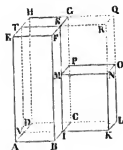
2.° Quand'anche le altezze AE, AI sieno incommensurabili, sarà sempre

$$AG:AL::AE:AI,$$

poichè seguendo la medesima via tenuta pei parallelogrammi nella prop. 3 del lib. 2, si dimostrerà, che il quarto termine della proporzione non può essere nè maggiore nè minore di AI.

PROPOSIZIONE XV. — *Teorema.*

Due parallelepipedi rettangoli AG, IQ (fig. 195) *di medesima altezza* AE, *stanno tra loro come le rispettive basi* ABCD, IKLC.

Fig. 195.

Dimostrazione. Addossando i due solidi sull'angolo piano comune ICG, e prolungando il piano IKRS finchè incontri il piano ADHE secondo la retta VT, si formerà un terzo parallelepipedo VG paragonabile con ciascuno degli altri due AG, IQ.

I due solidi AG, VG avendo la stessa base DCGH, stanno fra loro come le loro altezze CB, CI; similmente i due solidi VG, IQ avendo la stessa base ICGS, stanno fra loro come le loro altezze CD, CL; dunque si avranno le due proporzioni

Solid. AG:Sol. VG::CB:CI,

Solid. VG:Sol. IQ::CD:CL.

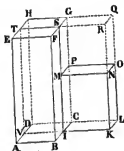
Moltiplicando queste proporzioni per ordine, e tralasciando il fattore comune Sol. VG, si avrà

$$\text{Solid. } AG : \text{Sol. } IQ :: CB \times CD : CI \times CL.$$

Ma $CB \times CD$ esprime la base ABCD, e $CI \times CL$ esprime la base IKLC; dunque due parallelepipedi rettangoli della stessa altezza stanno fra loro come le loro basi.

Proposizione XVI. — *Teorema.*

Due parallelepipedi rettangoli qualunque AG, IO (fig. 196) *stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le rispettive altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni.*

Fig 196.

Dimostrazione. Si dispongano i due parallelepipedi in modo che l'angolo piano ICP sia comune ad entrambi; si prolunghino i piani del secondo parallelepipedo IO, finchè formino il terzo parallelepipedo IQ che abbia comune col primo l'altezza, e col secondo la base; ciò posto, si avranno le due proporzioni

$$\text{Solid. } AG : \text{Sol. } IQ :: ABCD : IKLC \text{ (prop. ant.)},$$

$$\text{Solid. } IQ : \text{Sol. } IO :: AE : IM \text{ (prop. 14)}.$$

Moltiplicando per ordine, ed omettendo il fattore comune Sol. IQ, risulterà

$$\text{Sol. AG} : \text{Sol. IO} :: \text{ABCD} \times \text{AE} : \text{IKLC} \times \text{IM}.$$

In vece delle basi ABCD, IKLC si può mettere $AB \times AD$ ed $IK \times IC$, e risulterà

$$\text{Sol. AG} : \text{Sol. IO} :: \text{AB. AD. AE} : \text{IK. IC. IM}.$$

Dunque due parallelepipedi rettangoli stanno anche fra loro come i prodotti delle loro tre dimensioni o dei loro tre spigoli contigui.

Scolio. Misurare un solido, o uno spazio qualunque limitato si è cercare quante volte questo solido contiene un altro solido cognito e preso per unità; oppure determinare la *ragione* del solido, che si vuole misurare, al solido preso per unità di misura.

Nella misura dei solidi si assume ordinariamente per unità il cubo avente per lato l'unità di lunghezza, come il piede cubo, il trabucco cubo, il metro cubo ecc., se le linee si misurano col piede, col trabucco, o col metro ecc.: ed il numero di volte che un dato solido contiene il cubo preso per unità, si chiama la *solidità*, il *volume*, o la *misura* di questo solido.

Quando si tratta di vasi o corpi cavi, la misura dello spazio interno e vuoto di questi corpi prende anche il nome di *capacità*.

Proposizione XVII. — *Teorema.*

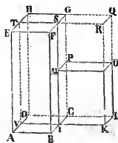
La misura di un parallelepipedo rettangolo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza, o al prodotto delle sue tre dimensioni.

Dimostrazione. Se nel teorema precedente (fig. 197), in vece del secondo parallelepipedo IO, si prende il cubo fatto sull'unità lineare, la proporzione sussisterà sempre nello stesso modo, ma in questo caso le tre dimensioni del cubo preso per unità di volume essendo eguali all'unità lineare, la proporzione accennata diventerà parallelepipedo. AG sta al cubo (unità di volume) come

AB. AD. AE sta ad 1. 1. 1., ossia :: AB. AD. AE : 1.

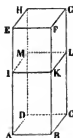
Onde si vede che il prodotto della base per l'altezza, ossia il prodotto dei tre spigoli contigui esprime quante volte il parallelepipedo AG contiene l'unità di volume. Dunque questo prodotto è la vera misura della grandezza o del volume del parallelepipedo.

Conforme si è altrove avvertito, per prodotto dei tre spigoli dee intendersi il prodotto dei tre numeri che esprimono quante volte ciascuno spigolo contiene l'unità lineare.

Fig. 197.

Così se nel parallelepipedo AG della fig. 198 si suppongono i tre spigoli AB, AD, AE rispettivamente di 3, di 2, e di 8 once

di lunghezza, il volume del parallelepipedo AG sarà espresso dal numero $3 \times 2 \times 8 = 48$ once cube.

Infatti si può considerare il parallelepipedo AG come composto di otto strati sovrapposti di un'oncia di altezza: ciascuno di questi strati può similmente riguardarsi come composto di due file contenenti ciascuna tre cubi di un'oncia di lato: quindi ogni strato conterrà $2 \times 3 = 6$ di questi cubi, e tutto il parallelepipedo ne conterrà $6 \times 8 = 48$; cioè sarà il volume eguale a quarant'otto once cube.

Fig. 198.

Il cubo essendo un parallelepipedo rettangolo coi tre spigoli contigui eguali, il volume di un cubo qualunque avrà per misura la terza potenza del suo spigolo o lato. E di qui deriva il nome di cubo di un numero usato nell'aritmetica per significare la terza potenza dello stesso numero.

Quindi se saranno più cubi, i quali abbiano i loro lati rispettivamente eguali ad 1, 2, 3, 4, ecc. unità lineari, i loro volumi saranno espressi dai numeri 1, 8, 27, 64, ecc.: e così il cubo costrutto sopra una linea doppia, tripla, quadrupla di un'altra, sarà 8, 27, 64, ecc. volte maggiore del cubo costrutto sopra di questa.

Proposizione XVIII. — *Teorema.*

Il volume di un parallelepipedo qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Dimostrazione. Un parallelepipedo qualunque è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo della stessa altezza, e di base equivalente (prop. 13); ma il volume di questo secondo è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza (prop. ant.); dunque il volume del primo sarà parimente eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario 1°. Il volume di un prisma triangolare è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza: perchè ogni prisma triangolare è la metà di un parallelepipedo della stessa altezza, è di base doppia di quella del prisma (prop. 5 cor.); dunque ecc.

Corollario 2°. Il volume di un prisma qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Infatti ogni prisma può scomporsi in altrettanti prismi triangolari di medesima altezza, quanti sono i triangoli, in cui può dividersi la sua base; e la somma dei volumi di tutti questi prismi triangolari è eguale al volume del prisma totale: ora questa somma ha per misura il prodotto di tutti i triangoli componenti la base del prisma totale per l'altezza comune dei prismi triangolari o del prisma totale.

Corollario 3°. Due prismi di medesima altezza stanno fra loro come le loro basi: e *viceversa* due prismi di basi eguali, e solamente equivalenti, stanno fra loro come le loro altezze.

Proposizione XIX. *Lemma.*

Se il lato SC di una piramide triangolare SABC (fig. 199), si divide in parti eguali SK, KG, GH, HC, e pei punti di divisione si conducono altrettanti piani paralleli alla base ABC, e si formano per ciascun segmento della piramide due prismi triangolari, un esterno CABHDE o CD, l'altro interno C*ab*HFO o CF, ecc.;

La differenza tra la somma dei prismi esterni, e quella dei prismi interni, è sempre eguale al primo prisma esterno CD *formato sopra la base* ABC *della piramide.*

Questa verità risulterà evidente, se si osserva che ogni prisma interno, per es. CF, è eguale al prisma esterno soprastante HI, ecc., e che nell'ultimo segmento SK, il prisma interno è nullo.

Sarà dunque la somma dei prismi esterni eguale a

$$CD+HI+GQ+KU,$$

e la somma dei prismi interni

$$CF+HM+GR=HI+GQ+KU;$$

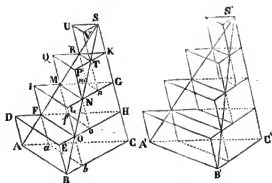
onde la differenza tra queste due somme è manifestamente eguale al primo prisma esterno CD.

Corollario. Accrescendo convenientemente il numero delle sezioni parallele ed equidistanti, l'altezza dei prismi diminuirà successivamente, ed il primo prisma esterno CD, ossia la differenza tra le due somme di prismi esterni ed interni, potrà diventare minore di un prisma qualunque dato, per piccolo che esso sia.

Ma la piramide SABC essendo maggiore della somma dei prismi interni e minore di quella dei prismi esterni, la differenza tra ciascuna di queste due somme e la piramide stessa potrà divenire minore di qualunque prisma dato, quantunque piccolissimo; poichè è chiaro che quest'ultima differenza è necessariamente minore del primo prisma esterno CD.

PROPOSIZIONE XX. — *Teorema.*

Due piramidi triangolari SABC, S'A'B'C' (fig. 199) *che hanno le basi* ABC, A'B'C' *equivalenti, e la medesima altezza, sono equivalenti in* solidità.

Fig. 199.

Dimostrazione Sia, se è possibile, la piramide SABC $>$S'A'B'C', e sia D la loro differenza, che potrà riguardarsi come il volume di un prisma di base eguale a quella della piramide S'A'B'C', e di altezza x: dividasi l'altezza della piramide S'A'B'C' in parti eguali tra di loro e minori di x, e si costruiscano i prismi esterni corrispondenti; pel lemma precedente la differenza tra la somma di questi prismi e la piramide S'A'B'C' sarà minore di D, cioè la somma dei prismi esterni sarà minore di S'A'B'C'+D. Ma si ha per ipotesi SABC=S'A'B'C+D; dunque la piramide SABC sarebbe maggiore della somma dei prismi esterni alla piramide S'A'B'C'.

Intorno alla piramide SABC s'immagini ora costrutto un egual numero di prismi esterni; le basi delle due piramidi essendo equivalenti, e le sezioni fatte a egual distanza dai due ver-

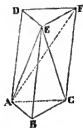
fici essendo parimente equivalenti (prop. 9, coroll.), i prismi esterni alle due piramidi saranno due a due equivalenti, perchè hanno basi equivalenti e la medesima altezza; dunque le loro somme saranno pure equivalenti, e per conseguenza la piramide SABC sarebbe maggiore della somma de'suoi prismi esterni, ciò che è impossibile; dunque la piramide SABC non può essere maggiore della piramide S'A'B'C'.

Con un ragionamento simile si dimostra che la piramide SABC non può essere minore di S'A'B'C'.

Dunque due piramidi triangolari aventi le basi equivalenti e la stessa altezza sono equivalenti in *solidità*.

Proposizione XXI. — *Teorema.*

Ogni piramide triangolare EABC (fig. 166) *è la terza parte di un prisma triangolare* ABCDEF *di egual base e di eguale altezza.*

Fig. 200.

Dimostrazione. Il piano AEC separa dal prisma la piramide triangolare EABC; la restante parte del prisma è una piramide quadrangolare EACFD avente il vertice in E, e la base ACFD; questa piramide quadrangolare viene divisa dal piano AEF in due piramidi triangolari EAFD, EACF; ed il prisma ABCDEF trovasi così scomposto in tre piramidi triangolari EABC, EAFD,

EACF; ora la prima EABC ha la stessa base e la stessa altezza del prisma; la seconda EAFD, se si considera posta sopra la base DEF col vertice in A, ha anche la stessa base e la stessa altezza del prisma, ed è per conseguenza equivalente alla prima; la terza poi EACF è equivalente alla seconda EAFD, perchè hanno le basi eguali AFD=ACF, e la stessa altezza.

Dunque la piramide EABC è la terza parte del prisma ABCDEF della stessa base ed altezza.

Corollario 1.° La solidità di una piramide triangolare è eguale al prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.

Corollario 2.° La solidità di una piramide qualunque è anche eguale al prodotto della sua base pel terzo della sua altezza, potendo ogni piramide (fig. 201) scomporsi in tante piramidi triangolari, quanti sono i triangoli in cui può scomporsi la base di essa.

Fig. 201.

Così, per es., è chiaro che il volume della piramide SABCDE è eguale alla somma dei volumi delle tre piramidi triangolari SABC, SACD, SADE aventi tutte la stessa altezza SP della piramide totale, onde sarà

$$SABCDE=(ABC+ACD+ADE)\times\tfrac{1}{3}SP=\text{area } ABCDE\times\tfrac{1}{3}SP.$$

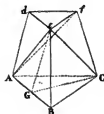
Corollario 3.° Ogni piramide è il terzo di un prisma di egual base e di eguale altezza.

Corollario 4.° Due piramidi qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze: epperò due piramidi di basi equivalenti stanno fra loro come le rispettive altezze; e due piramidi di eguale altezza stanno come le loro basi.

Corollario 5.° Il volume di un poliedro è eguale alla somma dei volumi delle piramidi in cui si può scomporre.

Proposizione XXII. — *Teorema.*

Il tronco di piramide triangolare ABC*def* (fig. 202) *a basi parallele, è equivalente alla somma di tre piramidi di altezza eguale a quella del tronco, e le cui basi sieno rispettivamente eguali alla base inferiore del tronco, alla sua base superiore e ad una superficie media proporzionale tra queste due.*

Fig. 202.

Dimostrazione. Chiamasi tronco di piramide la parte inferiore di una piramide tagliata trasversalmente da un piano: e quando questo piano è parallelo alla base della piramide, il tronco si dice a basi parallele. Ciò posto, il tronco ABC*def* può intendersi scomposto nelle tre piramidi *e*ABC, *e*A*fd*, *e*AC*f*; la prima *e*ABC ha per base il triangolo ABC, base inferiore del tronco, ed ha la stessa altezza del tronco, giacchè il suo vertice *e*

è posto sulla base superiore def parallela all'inferiore ABC; la seconda $eAfd$, ossia $Adef$ ha per base def, che è la base superiore del tronco, e la medesima altezza del tronco; si hanno così le due prime piramidi accennate nell'enunciato: rispetto alla terza piramide $eACf$, se dal punto e nel piano $dABe$ si tira la retta eG parallela alla retta dA, essa sarà anche parallela al piano $dACf$ (prop. 4, lib. 6), e per conseguenza i due punti e, G saranno equidistanti dal piano $dACf$; dunque la piramide $eACf$ è equivalente alla piramide $GACf$ avente la stessa base ACf ed il vertice in G; quest'ultima poi $GACf$ se si considera posta sulla base AGC col vertice in f, ha la stessa altezza del tronco, e la sua base AGC è media proporzionale tra le due basi ABC, def del tronco.

Infatti, i due triangoli ABC, AGC avendo la stessa altezza, daranno

$$ABC:AGC::AB:AG,$$

ed i triangoli AGC, def avendo l'angolo $A=d$, ed il lato $AG=de$, daranno

$$AGC:def::AC:df \text{ (prop. 16, lib. 3)};$$

ma le seconde ragioni di queste due proporzioni sono eguali, perchè i triangoli simili ABC, def, danno

$$AB:de::AC:df, \text{ ossia } AB:AG::AC:df;$$

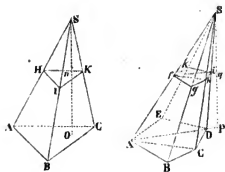
dunque eguagliando le due prime ragioni, si otterrà

$$ABC:AGC::AGC:def.$$

Dunque la base AGC della terza piramide è media proporzionale tra le due basi ABC, def del tronco.

Scolio. Questa proprietà del tronco di piramide triangolare è egualmente vera per qualunque altro tronco piramidale a basi

parallele; infatti, sieno due piramidi SABC, SABCDE (fig. 203) una triangolare e l'altra qualunque, ma di basi equivalenti e di eguale altezza SO=SP: queste piramidi sono equivalenti. Se si tagliano entrambe con piani paralleli alle loro basi ed equidistanti dai loro vertici, le sezioni HIK, *fghik* sono equivalenti siccome proporzionali alle basi ABC, ABCDE, e le due piramidi recise SHIK, S*fghik* sono pure equivalenti; onde il tronco ABCHIK sarà equivalente al tronco ABCDE*fghik*: e siccome questi due tronchi hanno le basi rispettivamente equivalenti e l'altezza eguale, il teorema dimostrato pel tronco triangolare ABCHIK è egualmente vero per un tronco qualunque ABCDE*fghik*.

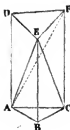
Fig. 203.

Corollario. Il volume di un tronco piramidale qualunque a basi parallele, è eguale al prodotto del terzo della sua altezza per la somma delle tre basi, inferiore cioè, e superiore del tronco, e media proporzionale tra queste due.

Così se B e *b* sono le due basi, ed A l'altezza del tronco, il volume di questo tronco sarà espresso per

$$\frac{1}{3}A \times (B + b + \sqrt{Bb})$$

PROPOSIZIONE XXIII. — *Teorema.*

Il tronco di prisma triangolare ABCDEF (fig. 204) *è equivalente alla somma di tre piramidi costrutte sulla medesima base* ABC *del tronco e coi vertici collocati nei vertici* D, E, F, *degli angoli della faccia opposta alla base.*

Fig. 204.

Dimostrazione. Il tronco ABCDEF si compone di tre piramidi EABC, EACF, EAFD, delle quali la prima EABC ha per base ABC, ed il vertice nel punto E; la seconda EACF è equivalente alla piramide BACF avente la stessa base ACF col vertice in B, e questa BACF può considerarsi posta sopra la base ABC col vertice in F; la terza piramide EAFD è equivalente ad un'altra piramide BACD posta sopra la base ACD=AFD col vertice in B, e quest'ultima BACD può anche considerarsi posta sopra la base ABC col vertice in D.

Dunque il tronco ABCDEF è equivalente alla somma delle tre piramidi EABC, FABC, DABC, aventi la base comune ABC, ed i vertici nei punti E, F, D.

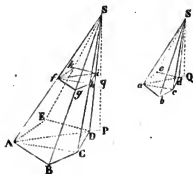
Corollario. Dal teorema precedente risulta, che un prisma triangolare troncato ha per misura il prodotto di una delle sue basi pel terzo della somma delle tre perpendicolari abbassate su questa base dai vertici della base opposta.

Se il prisma tronco è retto, il suo volume è espresso dal prodotto della base pel terzo della somma dei tre spigoli ad essa perpendicolari.

Qualunque siasi il prisma triangolare tronco, il suo volume è eguale al prodotto dell'area di una sezione perpendicolare agli spigoli paralleli per il terzo della somma di questi stessi tre spigoli.

Proposizione XXIV. — *Teorema.*

Due piramidi simili SABCDE, S*abcde* (fig. 205) *stanno fra loro come i cubi delle loro altezze, o come i cubi de' loro spigoli omologhi.*

Fig. 205.

Dimostrazione Dalla proposizione 9 si ha

$$ABCDE:abcde::\overline{SP}^2:\overline{SQ}^2;$$

ma si ha anche evidentemente

$$\tfrac{1}{3}SP:\tfrac{1}{3}SQ::SP:SQ;$$

moltiplicando queste due proporzioni per ordine, risulterà

$$ABCDE \times \tfrac{1}{3}SP : abcde \times \tfrac{1}{3}SQ :: \overline{SP}^3 : \overline{SQ}^3.$$

I due primi termini di questa proporzione esprimendo i volumi delle due piramidi simili, ne risulta che queste piramidi stanno fra loro come i cubi delle loro altezze.

Ma le altezze essendo proporzionali agli spigoli omologhi, si avrà

$$\overline{SP}^3 : \overline{SQ}^3 :: \overline{SA}^3 : \overline{Sa}^3 :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3, \text{ ecc.},$$

e per conseguenza

$$SABCDE : Sabcde :: \overline{SA}^3 : \overline{Sa}^3 :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3.$$

Dunque le piramidi simili sono anche proporzionali ai cubi de'loro spigoli omologhi.

Due parallelepipedi simili, o in generale due prismi simili stanno fra loro come i cubi de'loro spigoli omologhi, o come i cubi delle loro altezze.

Questa proposizione si dimostra medesimamente come nelle piramidi simili.

Proposizione XXV. — *Teorema.*

Due poliedri simili stanno fra loro come i cubi de'loro spigoli omologhi.

Dimostrazione. Due poliedri simili possono scomporsi in un egual numero di piramidi simili ciascuna a ciascuna e similmente disposte; ora le piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei loro spigoli omologhi (prop. ant.); dunque ciascuna piramide del primo poliedro sta alla piramide simile del secondo

come il cubo di uno spigolo della prima piramide al cubo dello spigolo omologo della seconda, ossia come il cubo di uno spigolo del primo poliedro al cubo dello spigolo omologo del secondo, poichè gli spigoli delle basi delle piramidi simili sono pure spigoli omologhi dei due poliedri. Ma gli spigoli omologhi dei poliedri simili essendo proporzionali, i loro cubi saranno pure proporzionali, e le piramidi simili dei due poliedri saranno due a due nella stessa ragione: dunque la somma di tutte le piramidi componenti il primo poliedro starà alla somma delle piramidi componenti il secondo, ossia il primo poliedro starà al secondo come il cubo di uno spigolo qualunque del primo sta al cubo dello spigolo omologo del secondo.

Problemi relativi al Libro VII.

da risolversi numericamente.

I. *Dato un tronco di piramide a basi parallele, trovare l'altezza intera della piramide da cui fu reciso, e dedurne il volume del tronco.*

Sia ABCDE*fghik* (fig. 206) il tronco dato, e P*q* la sua

Fig. 206.

altezza; supponendo la piramide compiuta, le due piramidi SABCDE, S*fghik* sono simili; dunque (prop. 9) sarà

$$AB:fg::SP:Sq,$$

e *dividendo*, risulterà

$$AB-fg:AB::SP-Sq:SP=\frac{AB\times Pq}{AB-fg},$$

ed

$$AB-fg:fg::SP-Sq:Sq=\frac{fg\times Pq}{AB-fg};$$

onde quando le dimensioni del tronco sieno date numericamente, si conosceranno le due altezze SP, Sq della piramide intera e della piccola piramide recisa: e siccome le basi di queste due piramidi sono date dal tronco stesso, si potranno calcolare i volumi delle due piramidi, la cui differenza farà conoscere il volume del tronco ABCDE$fghik$.

Per dare un esempio di questo calcolo rappresenteremo con M^2, m^2 le aree delle basi ABCDE, $fghik$, e con a l'altezza Pq del tronco: i lati M, m de'quadrati M^2, m^2 essendo proporzionali ai lati omologhi AB, fg, ed alle altezze SP, Sq, si troverà

$$SP=\frac{M\times a}{M-m},\ e\ Sq=\frac{m\times a}{M-m},$$

chiamando V e v i volumi delle piramidi SABCDE, S$fghik$, sarà

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{M^3a}{M-m}\ e\ v=\frac{1}{3}\times\frac{m^3a}{M-m};$$

onde

$$V-v=\frac{1}{3}a\times\left(\frac{M^3-m^3}{M-m}\right)=\frac{1}{3}a.\ (N^2+Mm+m^2)$$

conforme al teorema della prop. 22.

II. *Dato il lato di un cubo trovarne la diagonale e* viceversa.

Sia L il lato di un cubo, la sua diagonale D sarà espressa per $L\sqrt{3}$ (prop. 4, coroll.). Onde si otterrà la lunghezza della diagonale di un cubo qualunque moltiplicando quella del suo lato per la radice di 3.

Quando L è una linea, la diagonale D è eguale al lato del triangolo equilatero inscritto nel circolo del raggio L.

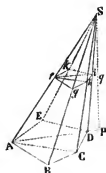
Viceversa, data la diagonale D del cubo, si troverà il suo lato

$$L = \frac{D}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} D \sqrt{3}:$$

se D fosse una linea, il lato L sarebbe eguale al raggio del circolo circoscritto al triangolo equilatero costrutto sulla diagonale D.

III. *Data una piramide, tagliarla con un piano parallelo alla base in due parti, i cui volumi stieno tra loro in una ragione data m:n.*

Sia SABCDV (fig. 207) la piramide data: si dee determi-

Fig. 207.

nare sullo spigolo SA un punto f, per cui passando un piano parallelo alla base, si abbia

$$Sfghik : ABCDEfghik :: m : n;$$

da questa proporzione, *componendo*, si ricava

$$SABCDE : Sfghik :: m+n : m;$$

ma per cagione della similitudine delle piramidi, si ha pure

$$\text{SABCDE}:\text{S}fghik::\overline{\text{SA}}^3:\overline{\text{S}f}^3 \text{ o } x^3;$$

dunque si avrà

$$m+n:m::\overline{\text{SA}}^3:x^3;$$

onde $$x^3=\overline{\text{SA}}^3\times\frac{m}{m+n},\text{ e } x=\text{SA}\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}.$$

Facendo $m=1$, ed $n=7$ si trova

$$x \text{ o } \text{S}f=\frac{1}{2}\text{SA}:$$

la piccola piramide recisa è in questo caso l'ottava parte della piramide intiera: quando $m=n$, si trova

$$x=\text{SA}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\text{SA}\sqrt[3]{4},$$

e la piramide è allora tagliata in due parti equivalenti.

IV. *Determinare lo spigolo e la superficie totale di un tetraedro regolare, il cui volume è 15 metri cubi.*

Chiamando a lo spigolo del tetraedro, la sua base sarà espressa per $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$: la sua altezza sarà $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$: ed il suo volume sarà

$$=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}\times\frac{1}{9}a\sqrt{6}=\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}:$$

si avrà dunque

$$\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}=15^{\text{m c.}}:$$

onde $\quad a^2=\frac{15.12}{\sqrt{2}}=15.6\sqrt{2}$, ed $a=\sqrt[3]{15.6\sqrt{2}};$

terminando il calcolo si troverà la lunghezza dello spigolo a, e quindi la superficie totale del tetraedro espressa per $a^2\sqrt{3}$.

V. *Formare un parallelepipedo rettangolo di un volume dato, o equivalente ad un cubo dato, ed in cui gli spigoli adiacenti stieno fra loro nella ragione di numeri dati, per es. come* 2:3:5.

Sia c^3 il volume del cubo dato, ed x lo spigolo minore del parallelepipedo, gli altri due spigoli saranno rispettivamente $\frac{3x}{2}$ e $\frac{5x}{2}$, ed il volume del parallelepipedo sarà espresso per $\frac{15x^3}{4}$, dunque dovrà essere

$$\frac{15x^3}{4}=c^3;\ \text{onde}\ x^3=\frac{4c^3}{15},\ \text{ed}\ x=\sqrt[3]{\frac{4c^3}{15}}.$$

Se il volume del parallelepipedo dovesse essere di 240 metri cubi, sarebbe

$$c^3=240\ \text{ed}\ x=\sqrt[3]{\frac{4.240}{15}}=4^{m.};$$

gli altri due spigoli sarebbero $6^{m.}$ e $10^{m.}$.

VI. *Data la base di una piramide regolare e la sua altezza, trovare l'espressione della sua superficie.*

Sia P il perimetro della base, a il suo apotema misurato o calcolato sulla figura della base, e b l'altezza della piramide: l'apotema della piramide sarà espresso per $\sqrt{a^2+b^2}$: dunque $\frac{1}{2}P\sqrt{a^2+b^2}$ esprimerà la superficie convessa, ed $\frac{1}{2}P\,(a+\sqrt{a^2+b^2})$ darà la superficie totale della piramide.

VII. *I lati della base di un tronco di prisma triangolare retto sono* $5^{m\cdot}$, $6^{m\cdot}$, $7^{m\cdot}$; *e gli spigoli perpendicolari alla base sono* $3^{m\cdot}$, $4^{m\cdot}$, $6^{m\cdot}$: *trovare il suo volume.*

L'area della base è espressa per $\sqrt{9.4.3.2}=6\sqrt{6}$: dunque (prop. 23) il volume è eguale ad

$$\frac{1}{3}(3+4+6).\,6\sqrt{6}=13.\,2\sqrt{6}=63^{m.\,c.},\,686.$$

VIII. *Sopra una base quadrata formare una piramide retta equivalente ad un cubo dato, ed in cui la lunghezza degli spigoli inclinati stia all'altezza in una ragione data* $m:n$.

Sia c^3 il volume del cubo dato ed x l'altezza della piramide: lo spigolo inclinato sarà espresso per $\frac{mx}{n}$,

ed $\frac{m^2x^2}{n^2}-x^2=x^2.\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right)$ esprimerà il quadrato della mezza diagonale della base, per conseguenza l'area della base quadrata

sarà
$$=2\,x^2.\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right),$$

ed il volume della piramide verrà espresso per

$$\frac{2}{3}x^3.\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right);$$

si avrà dunque

$$\frac{2}{3}x^3.\left(\frac{m^2-n^2}{n^2}\right)=c^3:$$

onde

$$x^3=\frac{3}{2}c^3\times\frac{n^2}{m^2-n^2};\ \text{ed}\ x=c\sqrt[3]{\frac{3}{2}\times\frac{n^2}{m^2-n^2}}.$$

sia ad esempio $c^3 = 375^{m.c.}$, $m=5$, $n=4$: sarà $c=5\sqrt[3]{3}$, e l'altezza

$$x=5\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{9}}=5\sqrt[3]{\frac{9}{2}\cdot\frac{16}{9}}=5\sqrt[3]{8}=10^{m.}$$

lo spigolo inclinato sarà $12^{m.},5$. La base della piramide sarà $=112^{m.q.},5$, ed il suo lato $=10^{m.},606\ldots$ con queste dimensioni si potrà facilmente costrurre la piramide.

IX. *Sopra una base data costruire un tronco di piramide di volume e di altezza pure dati.*

Sia la base data un quadrato di $2^{m.}$ di lato, ossia di $4^{m.q.}$ di area, il volume del tronco $=84^{m.c.}$, l'altezza $=9^{m.}$, ed esprima x^2 l'area della base incognita: dalla prop. XXII si ha

$$3(4+x^2+2x)=84;$$

onde

$$x^2+2x=28-4=24,$$

ed

$$x=-1+5=4^{m.}.$$

La base cercata è dunque un quadrato di $4^{m.}$ di lato, ossia di $16^{m.q.}$ di area.

Se la base data fosse un poligono qualunque di un'area equivalente a $4^{m.q.}$, il valore di x esprimerebbe il lato del quadrato equivalente alla seconda base, la quale sarebbe simile alla base data, e conterrebbe un'area di $16^{m.q}$; i lati di questa base sarebbero dunque rispettivamente doppii dei loro omologhi nella prima.

LIBRO OTTAVO

Dei tre corpi rotondi (*), ossia del cilindro retto, del cono retto e della sfera.

Definizioni.

I. Chiamasi cilindro retto il solido generato dal rivolgimento di un rettangolo ACFD (fig. 208), intorno al lato immobile CF, che si chiama *asse* del cilindro.

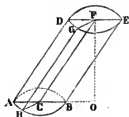
Fig. 208.

In questo movimento i lati AC, DF perpendicolare all'asse descrivono due circoli eguali e paralleli AHB, DKE, che sono le

(*) Diconsi in generale corpi rotondi, o solidi di *rivoluzione* quelli, che sono prodotti dal rivolgimento di una superficie piana, intorno ad una linea retta di posizione fissa. La Geometria elementare considera specialmente tre soli di questi corpi, cioè il cilindro retto, il cono retto, e la sfera.

basi del cilindro; il lato AD parallelo all'asse CF, descrive la superficie convessa del cilindro, e si chiama linea *generatrice* o lato del cilindro. Nel cilindro retto l'altezza è eguale al lato AD, o all'asse CF: qualunque sezione MNP perpendicolare all'asse è un circolo eguale a ciascuna delle basi; e qualunque sezione HKLI fatta per l'asse è un rettangolo doppio del rettangolo generatore ACFD.

II. Chiamasi cilindro obliquo (fig. 209) il solido terminato da una superficie convessa generata da una retta AD obliqua al piano di un circolo AHB, ed obbligata a percorrere col suo piede la circonferenza AHB, rimanendo costantemente parallela alla sua posizione primitiva AD. La retta mobile AD si chiama la generatrice della superficie cilindrica, ed anche lato del cilindro; la sua estremità E descriverà la circonferenza di un circolo eguale e parallelo alla base AHB; la retta CF, che unisce i centri delle due basi, è l'asse, e la perpendicolare FO compresa tra i piani delle basi è l'altezza del cilindro (*).

Fig. 209.

Qualunque sezione fatta nel cilindro obliquo da un piano parallelo alle basi è anche un circolo eguale a ciascuna delle

(*) Se la retta AD invece di percorrere la circonferenza di un circolo, si movesse nello stesso modo sopra un'altra curva qualunque, la superficie generata da AD sarebbe ancora cilindrica, ma diversa da quella del cilindro circolare secondo la diversa natura della curva che dirige il movimento della generatrice.

basi; e qualunque sezione fatta per l'asse CF è un parallelogrammo.

III. Chiamasi cono retto (fig. 210) il solido generato dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo ACS intorno ad un suo *cateto* immobile SC.

Fig. 210.

In questo movimento il cateto AC descrive un piano circolare ADBE, che chiamasi la base del cono; e l'ipotenusa SA descrive la superficie convessa del cono.

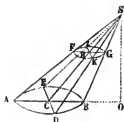
Il punto S chiamasi il vertice del cono, il cateto immobile SC è l'asse o l'altezza, e l'ipotenusa SA è il lato o l'*apotema* del cono.

Il cono obliquo (fig. 211) è un solido compreso da una base circolare ADBE, e da una superficie convessa generata da una retta SA che gira attorno alla circonferenza ADBE, passando sempre per un punto S dato fuori del piano della base (*).

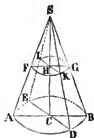
Ogni sezione FKGI, fatta in un cono parallelamente alla sua base, è un circolo; ed ogni sezione SDE, fatta per l'asse, è

(*) Se la retta SA invece di percorrere la circonferenza di un circolo, percorresse una curva qualunque, la superficie generata da SA sarebbe ancora conica, ed il solido compreso sarebbe pure un cono, ma differente del cono a base circolare secondo la varia natura della curva che dirige il movimento della generatrice SA.

un triangolo; nel cono retto questo triangolo è sempre isoscele, e doppio del triangolo generatore SAC.

Fig. 211.

IV. Se dal cono SADB, per mezzo di una sezione parallela alla base, si recide il cono SFKG, il solido restante ABGF chiamasi cono troncato, o tronco di cono a basi parallele.

Il tronco di cono retto ABGF (fig. 212) a basi parallele può immaginarsi generato dalla rivoluzione di un trapezio ACHF intorno al lato CH perpendicolare ai due lati paralleli AC, FH.

Fig. 212.

In questo movimento i due lati AC, FH generano due cir-

coli, che sono le due basi parallele, ed il lato AF genera la superficie convessa del tronco.

Il lato immobile CH chiamasi l'asse o l'altezza, ed AF il lato del tronco.

V. Due cilindri retti, o due coni retti sono simili, quando hanno le altezze proporzionali ai raggi delle basi.

Nei cilindri e coni obbliqui, oltre alla condizione precedente si richiede ancora, per la loro similitudine, che gli assi sieno egualmente inclinati sulle loro basi.

VI. Un piano è tangente ad un cilindro quando ha una sola linea retta comune colla superficie cilindrica, e questa retta è un lato del cilindro stesso.

Similmente un piano è tangente ad un cono quando ha una sola linea retta comune colla superficie conica; e questa retta è un lato del cono.

VII. Un prisma, i cui spigoli laterali sieno lati di un cilindro, dicesi inscritto nel cilindro; ed il cilindro dicesi circoscritto al prisma.

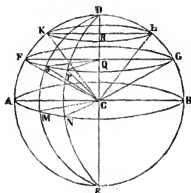
Ed un prisma che abbia le sue facce tangenti ad un cilindro, e le basi negli stessi piani di quelle del cilindro, dicesi circoscritto al cilindro; *viceversa* il cilindro è inscritto nel prisma.

Una piramide i cui spigoli sieno lati di un cono, dicesi inscritta nel cono: e il cono è allora circoscritto alla piramide.

Ed una piramide che abbia le sue facce tangenti ad un cono e la base nel medesimo piano di quella del cono, dicesi ad esso circoscritta: e il cono è allora inscritto nella piramide.

VIII. La *sfera* è un solido terminato da una superficie curva,

di cui tutti i punti sono egualmente distanti da un punto interno, che chiamasi il centro della sfera (fig. 213).

Fig. 213.

La sfera può riguardarsi come generata dal rivolgimento di un semicircolo DAE, che gira intorno al suo diametro immobile DE; perchè la superficie descritta in questo movimento dalla mezza circonferenza DAE avrà manifestamente tutti i suoi punti equidistanti dal centro C.

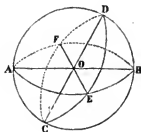
Le rette condotte dal centro alla superficie sferica chiamansi raggi; e le rette condotte pel centro, e terminate da ambe le parti dalla superficie sferica, come AB, DE, chiamansi diametri.

In una medesima sfera tutti i raggi sono eguali, e tutti i diametri sono parimente eguali e doppii dei raggi.

IX. Si dimostrerà (prop. 7) che ogni sezione fatta da un piano nella sfera è un circolo; questo circolo dicesi massimo quando la sezione è fatta pel centro della sfera: ciò posto, chiamasi *fuso sferico* la parte DAEMD della superficie sferica compresa tra due mezze circonferenze di circoli massimi DAE e DME; e la parte del solido sferico compresa tra gli stessi semi-

circoli massimi, alla quale il fuso serve di base, si chiama *spicchio sferico*.

X. La porzione ACE (fig. 214) della superficie sferica compresa fra tre archi AC, AE, CE di circoli massimi chiamasi triangolo sferico. Gli archi sono i lati del triangolo, i quali sono sempre supposti minori della mezza circonferenza, e gli angoli diedri che i piani di questi archi fanno tra loro, sono gli angoli del triangolo sferico.

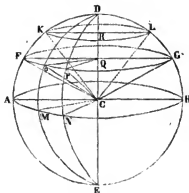
Fig. 214.

XI. *Poligono sferico* è una parte della superficie della sfera terminata da più archi di circoli massimi.

XII. Dicesi *piramide sferica* la parte del solido sferico compresa tra i piani di un angolo solido il cui vertice è al centro, e la base della piramide è il poligono sferico formato dagli stessi piani sulla superficie della sfera.

XIII. Un piano è tangente ad una sfera, quando ha un sol punto comune colla superficie sferica.

XIV. Chiamasi zona la parte della superficie sferica compresa

tra due piani paralleli, che ne sono le basi. Se uno di questi piani è tangente alla sfera, allora la zona ha una sola base, e chiamasi *calotta sferica*, come KDL (fig. 215).

Fig. 215.

Segmento sferico è la parte FGLK del solido sferico compresa fra due piani paralleli che ne sono le basi.

L'altezza di una zona o di un segmento è la perpendicolare QR che misura la distanza de'due circoli paralleli, che sono le basi della zona o del segmento. Il segmento può anche avere una sola base, come KLD.

XV. Chiamasi *settore sferico* il solido CKDL generato dalla rivoluzione di un settore circolare KCD, che s'aggira intorno ad uno de'suoi raggi CD.

PROPOSIZIONE I. — *Teorema.*

La superficie convessa di un cilindro retto è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

Dimostrazione. Un cilindro retto potendosi considerare come un prisma regolare di un numero infinito di facce, la sua superficie convessa si ottiene come quella del prisma regolare, moltiplicando cioè la circonferenza della base per l'altezza. Si può anche dimostrare questa verità, osservando che la superficie del cilindro retto tagliata nella direzione del suo lato e svolta sopra di un piano prende la forma di un rettangolo, la cui base è eguale alla circonferenza della base del cilindro, e l'altezza eguale a quella del cilindro.

Corollario 1°. La superficie totale di un cilindro retto è eguale al prodotto della circonferenza della base per la somma del suo lato e del raggio della base.

Corollario 2°. La superficie di ciascuna base del cilindro retto sta alla superficie convessa, come la metà del raggio della base sta all'altezza del cilindro.

Corollario 3°. Le superficie dei cilindri simili stanno fra loro come i quadrati dei raggi o dei diametri delle basi, oppure come i quadrati delle altezze.

Scolio 1°. Il cilindro obliquo potendosi anche considerare come un prisma obliquo a basi regolari di un numero infinito di lati, la regola della superficie dei prismi obliqui è anche applicabile ai cilindri obliqui: dunque (prop. 11, lib. 7, scol. 3) la superficie convessa di un cilindro obliquo ha per misura il prodotto della circonferenza di una sezione perpendicolare ai lati per la loro lunghezza comune; ma si dee notare che la circonferenza di questa sezione perpendicolare ai lati non è una circonferenza di circolo, e che la sua lunghezza non può ottenersi coi soli mezzi della Geometria elementare; essa potrà però, nei casi pratici, misurarsi meccanicamente con un filo che inviluppi il cilindro nel piano della sezione perpendicolare ai lati.

Scolio 2°. Tagliando un cilindro retto con un piano obliquo all'asse, e che non incontri le basi, i due segmenti prendono il nome di tronchi di cilindro retto.

Se il piano segante passa pel mezzo dell'asse, i due tronchi sono eguali in tutte le loro parti: dunque un tronco di cilindro retto è la metà di un cilindro parimente retto avente la stessa base del tronco, e l'asse doppio di quello del tronco.

Onde segue, che la superficie convessa di un tronco di cilindro retto ha per misura il prodotto del suo asse per la circonferenza della sua base circolare.

Proposizione II. — *Teorema.*

Il volume di un cilindro è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Dimostrazione. Un cilindro qualunque potendosi considerare come un prisma di un numero infinito di facce, il suo volume sarà, come quello del prisma, eguale al prodotto della base per l'altezza. Onde se R esprime il raggio della base di un cilindro, ed A la sua altezza, l'area della base sarà espressa per πR^2, ed il volume per $\pi R^2 \times A = \pi AR^2$.

Corollario 1°. I cilindri di medesima base stanno fra loro come le loro altezze; ed i cilindri della stessa altezza stanno come le basi.

Corollario 2°. I cilindri simili stanno fra loro come i cubi de'raggi, oppure come i cubi delle altezze.

Perchè le basi essendo proporzionali ai quadrati dei raggi, od ai quadrati delle altezze, le basi moltiplicate per le altezze ossia i cilindri stessi, saranno proporzionali ai cubi delle altezze o dei raggi.

Corollario 3°. Il volume di un tronco di cilindro retto è eguale al prodotto della sua base circolare per il suo asse (prop. 1, scol. 2).

PROPOSIZIONE III. — *Teorema.*

La superficie convessa di un cono retto è eguale al prodotto della circonferenza della sua base per la metà del suo lato.

Dimostrazione. Un cono retto potendosi considerare come una piramide regolare di un numero infinito di facce il cui apotema è uguale al lato stesso del cono, la sua superficie convessa è come quella della piramide regolare uguale al prodotto della circonferenza della base per la metà del lato.

Si può anche dimostrare la stessa verità osservando che per cagione dei lati eguali e della somma degli angoli fatti dai lati intorno al vertice minore di 4 retti, la superficie convessa del cono retto tagliata secondo il lato e svolta sopra di un piano, prende la forma di un settore circolare, il cui arco è eguale alla circonferenza della base del cono, ed il raggio è il lato stesso del cono.

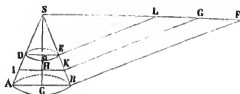
Corollario 1°. La superficie totale del cono retto, comprendendo in essa quella della base, ha per misura la metà del prodotto della circonferenza della sua base per la somma del suo lato e del raggio della base.

Corollario 2°. La superficie convessa del cono retto sta a quella della sua base, come il lato del cono sta al raggio della base.

Corollario 3°. Le superficie dei coni simili stanno fra loro come i quadrati dei raggi delle basi, o come i quadrati delle altezze.

PROPOSIZIONE IV. — *Teorema.*

La superficie convessa di un tronco di cono retto ADEB (fig. 216) *a basi parallele, è eguale alla semisomma delle circonferenze delle due basi moltiplicata per il lato del tronco* BE.

Fig. 216.

Dimostrazione. Si tiri la retta BF perpendicolare al lato SB, ed eguale alla circonferenza CB, si unisca SF, e si conduca EL parallela a BF; sarà

$$SB : SE :: \text{circonf. } CB : \text{circonf. } OE$$

e

$$SB : SE :: BF : EL;$$

onde risulta

$$\text{circonf. } CB : \text{circonf. } OE :: BF : EL;$$

ma BF$=$circonf. CB; dunque EL$=$ circonf. OE.

Ciò posto, la superficie del cono SAB è equivalente al triangolo SBF, e la superficie del cono SDE è equivalente al triangolo SEL; dunque la superficie del tronco ADEB sarà equivalente al trapezio BELF. Ma la misura del trapezio BELF è eguale a

$$BE \times \left(\frac{BF+EL}{2}\right),$$

e BF+EL è la somma delle due circonferenze delle basi del tronco: dunque la superficie convessa del tronco di cono retto è eguale al prodotto del suo lato per la semi-somma delle circonferenze delle basi.

Corollario. Se dal punto K preso sul mezzo del lato BE si tira la retta KI parallela a BA, e KG parallela a BF, sarà

$$KG=\frac{BF+EL}{2}=\text{circonf.}HK;$$

dunque la superficie convessa del tronco di cono retto a basi parallele è anche eguale al prodotto del suo lato per la circonferenza della sezione perpendicolare all'asse, ed equidistante dalle due basi.

Scolio. La superficie convessa di un tronco di cono retto a basi parallele tagliata secondo un lato del cono, e svolta sopra di un piano, prende la forma di una porzione di corona o zona circolare compresa fra due archi concentrici descritti con raggi rispettivamente eguali ai lati del cono intero e della parte recisa: e le lunghezze di questi archi sono rispettivamente eguali alle circonferenze intere delle due basi del tronco.

Proposizione V. — *Teorema.*

Il volume di un cono è eguale al prodotto della sua base per il terzo della sua altezza.

Dimostrazione. Il cono può considerarsi come una piramide d'infinite facce; epperò si otterrà il volume del cono come quello della piramide, moltiplicando cioè la sua base pel terzo della sua altezza: onde se R esprime il raggio della base di un cono, ed A la sua altezza, il volume del cono sarà espresso per

$$\pi R^2 \times \frac{1}{3}A=\frac{1}{3}\pi AR^2.$$

Corollario. Un cono è il terzo di un cilindro di medesima base e di medesima altezza. Onde segue ancora:

1°. Che i coni di eguale altezza stanno fra loro come le basi;

2°. Che i coni di egual base stanno fra loro come le altezze;

3°. Che i coni simili stanno fra loro come i cubi dei raggi delle basi, oppure come i cubi delle altezze.

PROPOSIZIONE VI. — *Teorema.*

Il volume di un tronco di cono ADEB (fig. 217) *a basi parallele, è eguale al prodotto della terza parte dell'altezza del tronco per la somma della base inferiore del tronco, della sua base superiore e di una media proporzionale tra queste due basi.*

Fig. 217.

Dimostrazione. Un tronco di cono a basi parallele si può considerare come un tronco a basi parallele di una piramide di un'infinità di facce, sarà dunque il volume del cono tronco, come quello del tronco di piramide eguale al prodotto della terza parte dell'altezza per la somma della base inferiore del tronco, della

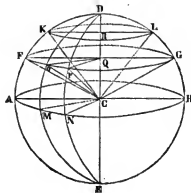
sua base superiore e di una media proporzionale a queste due basi: cioè sarà

$$\text{vol. } ADEB = \frac{1}{3} Cc . (\pi \overline{AC}^2 + \pi \overline{Dc}^2 + \pi AC . Dc)$$

$$= \frac{1}{3} \pi Cc (\overline{AC}^2 + \overline{Dc}^2 + AC \times Dc).$$

PROPOSIZIONE VII. — *Teorema.*

Ogni sezione fatta da un piano nella sfera è un circolo.

Fig. 218.

Dimostrazione. Sia FPG (fig. 218) la sezione fatta da un piano nella sfera il cui centro è C: dal centro C conducansi la perpendicolare CQ sul piano FPG, e diverse rette CF, CO, CP a diversi punti della curva FPG che termina la sezione: le oblique CF, CO, CP, ecc. sono eguali siccome raggi della sfera, esse sono dunque equidistanti dalla perpendicolare CQ; epperò tutte le rette

QF, QO, QP, QG, sono eguali; dunque la sezione FPG è un circolo, il cui centro è nel punto Q.

Quando la sezione passa pel centro della sfera, come AMB, il suo raggio è eguale a quello della sfera, ed il circolo dicesi massimo: le sezioni fatte fuori del centro, come FG, KL, sono circoli minori.

Corollario. I. I circoli massimi di una medesima sfera sono tutti eguali: i circoli minori decrescono di mano in mano che i loro piani sono più lontani dal centro.

II. Due circoli massimi ADB, AMB si tagliano sempre in due parti eguali; poichè la loro intersezione comune AB, passando pel centro C, è un diametro comune ai due circoli.

III. Ogni circolo massimo AMB divide la sfera in due parti eguali che diconsi *Emisferi*; poichè separando i due emisferi ed applicandoli sopra la base comune colla loro convessità volta dalla stessa parte, le due superficie coincideranno l'una coll'altra; altramente i raggi della sfera non sarebbero eguali.

Scolio. Chiamasi *polo* di un circolo della sfera il punto della superficie sferica egualmente distante da tutti i punti della circonferenza di questo circolo.

Ogni circolo della sfera, massimo o minore, ha due poli collocati sopra uno stesso diametro o asse perpendicolare al piano di questo medesimo circolo: così supponendo i circoli AB, FG, KL tutti perpendicolari all'asse DE, i due punti D, E sono poli tanto del circolo massimo AB come dei circoli minori FG, KL.

I circoli paralleli hanno lo stesso asse e gli stessi poli.

La distanza di una circonferenza massima al suo polo, misurata sulla superficie sferica, è in tutti i suoi punti eguale al quadrante della circonferenza massima: in linea retta questa stessa distanza è eguale alla corda del quadrante.

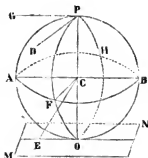
Un circolo della sfera è determinato da un punto della sua circonferenza e da uno de' suoi due poli: e con questi dati si può descrivere col compasso a punte convenientemente incurvate facendo centro nel polo dato, e prendendo per raggio la distanza tra il polo ed il punto dato dalla circonferenza.

Due punti dati sulla superficie di una sfera, che non sieno diametralmente opposti, determinano la posizione di un circolo massimo; perchè tra questi due punti ed il centro della sfera può condursi un solo piano.

Onde tra due punti della superficie di una sfera che non sieno diametralmente opposti, può condursi un solo arco di circolo massimo, ed un'infinità di archi di circoli minori.

Proposizione VIII. — *Teorema.*

L'angolo sferico APF (fig. 219) *ossia l'angolo formato da due archi di circoli massimi* PA, PF, *è eguale all'angolo* DPG *fatto dalle tangenti a questi archi nel punto* P.

Fig. 219.

Dimostrazione. La tangente PG condotta nel piano dell'arco PA è perpendicolare al raggio CP, e la tangente PD condotta nel piano dell'arco PF è perpendicolare allo stesso raggio CP; dunque (prop. 9, lib. 6) l'angolo DPG è eguale all'angolo dei piani PAC, PFC, che è l'angolo stesso degli archi PA, PF indicato per APF.

L'angolo sferico APF ha per misura l'arco di circolo massimo AF compreso fra i suoi lati PA, PF, prolungati se è necessario, e descritto dal punto P, come polo, con un raggio eguale alla corda del quadrante: poichè l'arco AF è la misura dell'angolo ACF=GPD=APF.

Scolio. Gli angoli sferici opposti al vertice, come APF, BPH, sono eguali.

Proposizione IX. — *Teorema.*

Un piano MN (fig. 219) *perpendicolare all'estremità di un raggio* CO *è tangente alla sfera.*

Dimostrazione. Preso sul piano MN un punto qualunque E, congiungasi questo punto col centro C della sfera: l'obliqua CE sarà maggiore della perpendicolare CO, e quindi il punto E e tutti gli altri punti del piano MN saranno posti fuori della sfera, eccetto l'unico punto O; dunque il piano MN è tangente alla sfera in O. *Reciprocamente* ogni piano tangente ad una sfera è perpendicolare al raggio condotto al punto di contatto.

Quindi risulta ancora che quando due sfere si toccano, i loro centri ed il punto di contatto sono in linea retta; e la distanza dei centri è eguale alla somma, o alla differenza de'raggi.

Proposizione X. — *Teorema.*

Tre circoli massimi AEBF, ACBD, CEDF (fig. 220), *che si tagliano due a due, dividono la superficie della sfera in* 8 *triangoli sferici due a due diametralmente opposti, ed eguali per simmetria.*

Quattro di questi triangoli sono posti nell'emisfero EACBD, e quattro altri nell'emisfero opposto FACBD. Considerando ora fra questi otto triangoli, per es., i due opposti ACE, BDF, si scorge subito, che essi hanno i loro lati rispettivamente eguali, cioè AC=BD, AE=BF, CE=DF, e gli angoli parimente eguali, cioè l'angolo CAE=DBF, siccome angoli diedri opposti al vertice, e per la stessa ragione l'angolo ACE=BDF, e l'angolo AEC=BFD; questi due triangoli hanno dunque tutte le loro parti costituenti eguali, ma non possono essere sopraposti, perchè le loro parti eguali sono disposte in ordine inverso; essi sono dunque eguali per simmetria.

Proposizione XI. — *Teorema.*

In ogni triangolo sferico ACE (fig. 220) *un lato qualunque* AE *è minore della somma degli altri due* AC+CE.

Dimostrazione. I raggi OA, OC, OE condotti dal centro della sfera ai vertici dei tre angoli del triangolo sferico determinano un angolo solido triedro OACE, i cui angoli piani hanno rispettivamente per misura gli archi, o lati AC, AE, CE del triangolo sferico ACE; ma ciascun angolo piano dell'angolo solido triedro è minore della somma degli altri due (prop. 12, lib. 6); dunque un lato qualunque di un triangolo sferico è minore della somma degli altri due.

Corollario. Il più breve cammino da un punto A ad un altro E sulla superficie sferica, è l'arco AE di circolo massimo, che

congiunge questi due punti: poichè 1° supponendo il punto C anche vicinissimo all'arco AE, si ha sempre

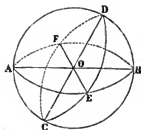
$$AE < AC + CE.$$

2.° L'arco AE di circolo massimo è pure sempre più corto di qualsivoglia altro arco di circolo minore sotteso dalla medesima corda AE; perchè si sa dalla Geometria piana, che tra due archi sottesi da una stessa corda il minore si è quello del raggio più lungo.

3.° Si può ancora dimostrare *per la riduzione all'assurdo*, che l'arco AE è minore di qualunque altra curva descritta sulla superficie sferica tra i due punti A, E.

PROPOSIZIONE XII. — *Teorema.*

La somma dei tre lati di un triangolo sferico è minore della circonferenza di un circolo massimo (fig. 220).

Fig. 220.

Dimostrazione. Sia ACE un triangolo sferico qualunque; si prolunghino i lati AC, AE fin che s'incontrino nuovamente in B; gli archi ACB, AEB saranno due mezze circonferenze di circoli

massimi; ma nel triangolo BCE si ha $CE<CB+EB$; e aggiugnendo ad entrambe le parti $AC+AE$, si avrà

$$AC+AE+CE<ACB+AEB,$$

ossia minore di una circonferenza massima.

La stessa verità risulta anche dall'osservare che i tre lati del triangolo sferico sono la misura dei tre angoli piani dell'angolo triedro OACE, la cui somma è sempre minore di quattro angoli retti.

Dallo stesso principio segue ancora, che la somma dei lati di un poligono sferico convesso è sempre minore della circonferenza di un circolo massimo.

Proposizione XIII. — *Teorema.*

La somma degli angoli di un triangolo sferico è minore di sei e maggiore di due angoli retti.

Dimostrazione. 1.° Essendo ciascun lato del triangolo sferico minore della mezza circonferenza, ciascun angolo dello stesso triangolo è minore di due angoli retti; dunque la somma dei tre angoli è minore di sei angoli retti.

2.° Ciascun angolo di un triangolo sferico ACE (fig. 220) è eguale all'angolo delle tangenti ai due archi nel vertice dell'angolo stesso (prop. 8): ora il piano delle due tangenti in A essendo perpendicolare al raggio AO, esso sarà pure perpendicolare ai piani AOC, AOE: lo stesso succede pe' piani delle tangenti in C ed in E: dunque i tre piani delle tangenti in A, C, E, sono due a due rispettivamente perpendicolari ai piani AOC, AOE, COE; epperò i tre piani delle tangenti s'incontreranno due a due secondo tre rette rispettivamente perpendicolari ai piani delle facce dell'angolo diedro OACE, e così formeranno un secondo angolo triedro opposto ad OACE, e tale che la somma di ciascuno de'suoi angoli

piani e dell'angolo opposto del triangolo sferico sarà eguale a due angoli retti, dunque la somma degli angoli piani di quest'angolo triedro e degli angoli del triangolo sferico sarà eguale a sei angoli retti; ma la somma degli angoli piani di un angolo triedro è sempre minore di quattro angoli retti; dunque la somma degli angoli di un triangolo sferico sarà sempre maggiore di due retti.

Corollario 1.° La somma degli angoli di un triangolo sferico può dunque variare da 180° sino a 540°, senza poter eguagliare nè l'uno nè l'altro di questi limiti; onde due angoli dati non determinano il terzo.

Corollario 2.° Un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti, due o tre angoli ottusi.

Scolio. Un triangolo sferico dicesi rettangolo, birettangolo, trirettangolo, secondo che esso ha uno, due o tre angoli retti.

Proposizione XIV. — *Lemma.*

La superficie convessa di un cono retto è anche eguale al prodotto della sua altezza per la circonferenza della perpendicolare innalzata sul mezzo del suo lato nel piano del triangolo generatore, e prolungata sino all'incontro dell'asse.

Fig. 221.

Dimostrazione. Se dal mezzo dell'ipotenusa AB di un triangolo rettangolo ABC (fig. 221) s'innalza nel piano del triangolo

stesso la perpendicolare DO, i due triangoli ABC, OBD rettangoli in C e D, coll'angolo B comune, sono simili; dunque si ha

$$AC:OD::BC:BD,$$

oppure

$$\text{circonf. } AC:\text{circonf. } OD::BC:\frac{1}{2}AB;$$

onde risulta

$$\text{circonf. } AC \times \frac{1}{2}AB = \text{circonf. } OD \times BC;$$

ma circonf. $AC \times \frac{1}{2}AB$ esprime la superficie del cono retto generato dalla rivoluzione del triangolo rettangolo ABC intorno al lato BC (prop. 3); dunque il prodotto circonf. $OD \times BC$ esprimerà anche la misura della superficie conica generata dal lato AB.

Medesimamente *la superficie convessa del tronco di cono retto a basi parallele, è anche eguale al prodotto della sua altezza per la circonferenza della perpendicolare innalzata sul mezzo del suo lato, e prolungata sino all'incontro dell'asse.*

Infatti, sia ACDB (fig. 222) il trapezio generatore del tronco

Fig. 222.

di cono retto, CD sarà l'asse o l'altezza del tronco, ed AB il suo lato. Se dal mezzo di AB s'innalza la perpendicolare KO, e si tirano BG perpendicolare, e KI parallela ad AC, i due triangoli

KIO, AGB sono simili, perchè hanno i loro lati vicendevolmente perpendicolari; dunque si ha

$$KI:OK::BG:AB,$$

oppure

$$\text{circonf.}\,KI:\text{circonf.}\,OK::BG:AB;$$

epperò sarà

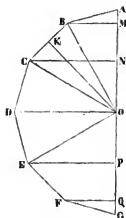
$$\text{circonf.}\,KI \times AB = \text{circonf.}\,OK \times BG;$$

ma circonf. $KI \times AB$ esprime la superficie convessa del tronco di cono retto generato dal trapezio ACDB (prop. 4, coroll.); dunque il prodotto della circonferenza OK moltiplicata per l'altezza BG ossia CD sarà anche la misura della superficie generata dal lato AB.

Supponendo nullo il raggio BD della base minore, la superficie generata da AB sarà quella di un cono intero, e si ricade allora nel lemma precedente: e supponendo eguali i raggi AC, BD delle due basi, la superficie generata da AB sarà quella di un cilindro retto; in questo caso la perpendicolare OK diviene eguale al raggio del cilindro. Onde la superficie convessa del cono retto, quella di un tronco di esso, e quella del cilindro retto sono tutte e tre espresse pel prodotto dell'altezza per la circonferenza della perpendicolare sul mezzo del lato e terminata all'asse.

PROPOSIZIONE XV. — *Teorema.*

Se un semipoligono regolare ABCDEFG *di un numero pari di lati* (fig. 223) *si rivolge intorno al diametro* AG, *la superficie generata dal semiperimetro* ADG *è eguale al prodotto della circonferenza* OK *del circolo inscritto pel diametro* AG *del circolo circoscritto.*

Fig. 223.

Dimostrazione. Le perpendicolari innalzate sul mezzo di ciascun lato passano pel centro O del poligono, e sono tutte eguali all'apotema OK; onde esprimendo la superficie generata dal lato AB per superf. AB, e così medesimamente quelle generate dagli altri lati BC, CD, si avrà (prop. ant.)

$$\text{Superf. AB} = \text{AM} \times \text{circonf. OK},$$
$$\text{Superf. BC} = \text{MN} \times \text{circonf. OK},$$
$$\text{Superf. CD} = \text{NO} \times \text{circonf. OK},$$
$$\text{Superf. DE} = \text{OP} \times \text{circonf. OK},$$

ecc.

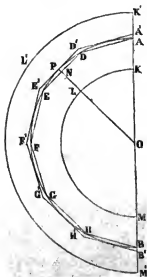
Dunque, prendendo la somma di tutte queste espressioni, la superficie generata dal semiperimetro ABCDEFG riuscirà eguale al prodotto della circonferenza OK pel diametro AG; giacchè

$$AM+MN+NO+OP+PQ+QG=AG.$$

Scolio. Quindi si fa manifesto che la superficie generata da una porzione qualunque BCDE del perimetro di un poligono regolare, posta tutta dalla medesima parte dell'asse AG, mentre s'aggira intorno a questo medesimo asse, ha per misura il prodotto MP × circonf. OK, essendo MP l'altezza della superficie descritta, o la parte dell'asse compresa tra le due perpendicolari BM, EP.

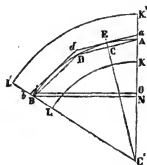
Proposizione XVI. — *Teorema.*

La superficie della sfera è eguale al prodotto del suo diametro per la circonferenza del suo circolo massimo (fig. 224).

Fig. 224.

Dimostrazione. La superficie della sfera si può considerare

come quella descritta dal semiperimetro di un poligono regolare di un numero infinito di lati, inscritto o circoscritto al semicircolo generatore della sfera; ma in questo caso l'asse A'B' del poligono circoscritto può riguardarsi come eguale al diametro AB, e l'apotema ON del poligono inscritto come eguale al raggio $OP=OA$; dunque il prodotto $AB \times$ circonf. OA esprimerà egualmente la superficie generata dal semiperimetro circoscritto, quella generata dal semiperimetro inscritto, e quella della sfera compresa tra queste due.

Scolio. Con lo stesso ragionamento si dimostra che la superficie della calotta sferica generata dall'arco AB (fig. 225), mentre il settore circolare ACB gira intorno al suo raggio CA, ha per misura il prodotto della sua altezza AN per circonf. CA.

Fig. 225.

Qualunque zona a due basi ha per misura il prodotto della sua altezza per la circonferenza massima della sfera.

Corollario 1°. Chiamando R il raggio della sfera, la sua superficie sarà

$$2R \times 2\pi R = 4\pi R^2,$$

cioè quadrupla di quella del circolo massimo che è

$$\frac{1}{2}R \times 2\pi R = \pi R^2.$$

Corollario 2°. Le superficie di due sfere stanno fra loro come i quadrati de' loro raggi, o de' loro diametri.

Corollario 3°. Due zone appartenenti ad una medesima sfera stanno fra loro come le loro altezze, ed una zona qualunque sta alla superficie intera della sfera, come l'altezza della zona al diametro della sfera.

Corollario 4°. Una zona qualunque ad una sola base è equivalente ad un circolo che abbia per raggio la corda dell'arco generatore della zona; perchè questa corda essendo media proporzionale tra il diametro della sfera e l'altezza della zona, il suo quadrato eguaglierà il prodotto del diametro della sfera per l'altezza della zona, e moltiplicando da ambe le parti per π risulterà la verità del corollario.

Proposizione XVII. — *Teorema.*

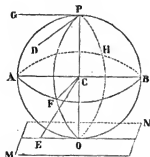
Il fuso sferico PAOFP (fig. 226) *sta alla superficie della sfera come l'angolo* ACF *del fuso sta a quattro angoli retti, o come l'arco* AF *che misura l'angolo del fuso sta alla circonferenza* AFDH.

Sia l'arco AF commensurabile con la circonferenza, e stia per es., AF:AFBH::5:48; dividasi la circonferenza AFBH in 48 parti eguali, AF conterrà 5 di queste parti; pei poli P, O e pei punti di divisione della circonferenza AFBH intendansi condotte altrettante mezze circonferenze massime; la superficie della sfera sarà così divisa in 48 piccoli fusi eguali, ed il fuso dato PAOFP conterrà 5 di questi piccoli fusi; dunque il fuso PAOFP sta alla superficie della sfera come 5 sta a 48, ossia come l'arco AF sta alla circonferenza AFBH.

Quando l'arco AF non ha con la circonferenza comune misura, si dimostra per la riduzione all'assurdo, che nella proporzione

$$\text{fuso PAOFP} : \text{sup. sferica} :: x : \text{circonf. AFBH}$$

il terzo termine x non può prendersi maggiore nè minore dell'arco AF.

Fig. 226.

Corollario 1°. La superficie di un fuso sferico PAOFP è eguale al prodotto del diametro OP per l'arco AF rettificato.

Corollario 2°. Due fusi appartenenti ad una stessa sfera stanno fra loro come i loro angoli, o come gli archi di circolo massimo che misurano questi angoli.

Scolio 1°. Se l'angolo del fuso è retto, la sua superficie è la quarta parte della superficie sferica: essa è dunque eguale a quella di un circolo massimo πR^2.

Questo risulta facilmente osservando, che, quando due circoli massimi PAOB, PFOH sono perpendicolari l'uno all'altro, essi dividono manifestamente la superficie sferica in quattro fusi eguali.

Scolio 2°. Tre circoli massimi PAOB, PFOH, AFBH perpendicolari tra loro, dividono la superficie della sfera in otto

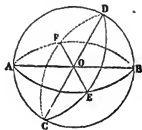
triangoli sferici trirettangoli, aventi tutti per lati tre *quadranti* di circoli massimi.

Onde la superficie del triangolo sferico trirettangolo è la metà di quella del fuso, il cui angolo è retto; oppure l'ottava parte della superficie della sfera.

La superficie del triangolo sferico trirettangolo è dunque eguale a quella di un semicircolo massimo, cioè $=\frac{1}{2}\pi R^2$.

PROPOSIZIONE XVIII. — *Teorema.*

La superficie di un triangolo sferico sta a quella della sfera come la somma de' tre angoli del triangolo diminuita di due angoli retti sta ad otto angoli retti.

Fig. 227.

Dimostrazione. Sia ACE (fig. 227) il triangolo sferico proposto: prolungando i suoi tre lati in intiere circonferenze ACBD, AEBF, CEDF, e rappresentando con S la superficie della sfera, e con R l'angolo retto, i due triangoli ACE, CBE equivalgono al fuso ACBEA, il cui angolo è l'angolo stesso A del triangolo sferico, ed avente per misura $\frac{S \times A}{4R}$ (prop. ant.);

I due triangoli ACE, ADE fanno il fuso CADEC, il cui angolo è C, la misura è $\frac{S \times C}{4R}$;

ed essendo ACE=BDF (prop. 10), i due triangoli ACE, EBD equivalgono al fuso EBFDE avente l'angolo E del triangolo proposto, e per misura $\frac{S \times E}{4R}$;

ma i due fusi ACBEA, CADEC coi due triangoli ACE, EBD equivalgono manifestamente a due volte il triangolo ACE più l'emisfero EACBD; dunque si avrà

$$2ACE + \frac{1}{2}S = \frac{S.(A+C+E)}{4R};$$

ossia

$$2ACE = \frac{S.(A+C+E)}{4R} - \frac{1}{2}S;$$

riducendo allo stesso denominatore i termini del secondo membro, e dividendo d'ambe le parti per 2, risulterà

$$ACE = \frac{S(A+C+E-2R)}{8R};$$

ciò che darà

$$ACE : S :: A+C+E-2R : 8R.$$

Scolio. Prendendo per unità di misura il triangolo trirettangolo, la superficie di un triangolo sferico qualunque avrà per misura la somma dei suoi tre angoli diminuita di due retti: cioè il triangolo sferico proposto conterrà tanti triangoli trirettangoli o parti di esso, quanti sono gli angoli retti o parti

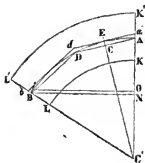
dell'angolo retto nella differenza tra la somma de'suoi trè angoli e due angoli retti.

Proposizione XIX. — *Teorema.*

Il volume della sfera è eguale al prodotto della sua superficie pel terzo del suo raggio.

Dimostrazione. Si può considerare la superficie sferica come composta di un'infinità di piccoli triangoli o poligoni sferici, e la sfera stessa come composta di piramidi aventi per basi questi poligoni, e per altezza comune il raggio della sfera; onde risulta, che la somma di tutte queste piramidi, ossia la sfera stessa avrà per misura la sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio.

Scolio. Con un simile ragionamento si dimostra, che il settore sferico generato dalla rivoluzione del settore circolare BCA (fig. 228) intorno al raggio CA, è eguale al prodotto della zona descritta dall'arco AB, che chiamasi la base del settore, pel terzo del raggio CA.

Fig. 228.

Il segmento sferico ad una sola base, generato dal semisegmento circolare ABN, è la differenza tra il settore sferico

generato dal settore circolare BCA, ed il cono generato dal triangolo BC'N.

Il segmento sferico a due basi generato dalla parte di circolo FDMBG (fig. 229) è la differenza de' due segmenti ad una sola base generati da ABG e da ADF.

Fig. 229.

Corollario 1°. Il volume della sfera è eguale a quello di una piramide, che abbia per base la superficie sferica, e per altezza il raggio della sfera.

Corollario 2°. Chiamando R il raggio di una sfera e D il suo diametro, il volume della sfera sarà espresso per

$$\frac{4}{3}\pi R^3, \text{ o per } \frac{1}{6}\pi D^3.$$

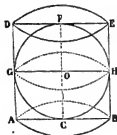
Corollario 3°. Le sfere stanno fra loro come i cubi de' loro raggi o de' loro diametri.

Corollario 4°. Il volume dello spicchio sferico è eguale al prodotto della superficie del fuso che serve di base allo spicchio pel terzo del raggio della sfera.

È chiaro che il volume dello spicchio sferico sta a quello della sfera, come l'angolo dello spicchio sta a quattro retti, o come l'arco di circolo massimo, che misura l'angolo dello spicchio, sta alla circonferenza massima.

PROPOSIZIONE XX. *Teorema.*

La superficie della sfera sta a quella del cilindro circoscritto (comprese le basi) come 2:3; ed i volumi di questi due corpi stanno nella stessa ragione delle loro superficie (fig. 230).

Fig. 230.

Dimostrazione. Sia il circolo CGFH, ed il quadrato ad esso circoscritto ABED: girando la figura intorno al diametro CF, il semicircolo CGF genera una sfera, ed il mezzo quadrato ACFD genera il cilindro ad essa circoscritto.

È manifesto che la base AB del cilindro circoscritto è eguale al circolo massimo della sfera, e l'altezza CF è eguale al diametro.

Ciò posto, il prodotto della circonferenza della base del cilindro per l'altezza CF esprime egualmente la superficie convessa del cilindro, o la superficie della sfera: dunque la superficie convessa del cilindro è eguale a quella della sfera, ossia a quattro circoli massimi; e la superficie totale del cilindro, cioè la somma della superficie convessa e delle due basi, è eguale a sei circoli massimi; epperò sta la superficie della sfera a quella del cilindro circoscritto come 4:6 oppure ::2:3.

2°. Il volume della sfera è eguale al prodotto di quattro circoli

massimi per la sesta parte del diametro, ossia di un circolo massimo per $\frac{4}{6}$ del diametro: ed il volume del cilindro circoscritto è eguale al prodotto di un circolo massimo per l'intero diametro; dunque il volume di una sfera sta a quello del cilindro circoscritto, come

$$\frac{4}{6} : 1 \text{ o come } 4:6 \text{ oppure } ::2:3.$$

I volumi della sfera e del cilindro circoscritto stanno dunque tra loro nella medesima ragione delle loro superficie.

Scolio. Un poliedro qualunque circoscritto ad una sfera, cioè che abbia tutte le sue facce tangenti alla sfera, può intendersi scomposto in piramidi con rette condotte dal centro della sfera ai vertici degli angoli solidi del poliedro: queste piramidi hanno per altezza comune il raggio della sfera, e per basi le diverse facce del poliedro: dunque la somma dei volumi di tutte queste piramidi, ossia il volume del poliedro stesso, sarà eguale al prodotto della sua superficie pel terzo del raggio della sfera inscritta.

Onde si scorge che i volumi de'poliedri circoscritti ad una stessa sfera, oppure a sfere eguali, stanno fra loro come le superficie degli stessi poliedri. Epperò la dimostrata proprietà del cilindro circoscritto è comune a moltissimi altri corpi.

Problemi relativi al Libro VIII

da risolversi numericamente.

I. *Trovare la ragione che passa tra i volumi della sfera, del cilindro circoscritto e del cono equilatero circoscritto.*

Chiamasi cono equilatero quello, in cui la sezione fatta per l'asse è un triangolo equilatero; quando questo cono è circoscritto alla sfera, la sezione per l'asse è eguale al triangolo equilatero circoscritto al circolo massimo generatore della sfera, ed il cono, essendo generato dalla metà di questo triangolo rotante intorno al suo asse, avrà il raggio della base eguale al lato del triangolo equilatero inscritto, e l'altezza eguale a tre volte il raggio della sfera; ciò posto, chiamando R il raggio della sfera, si avranno le tre espressioni seguenti:

Volume della sfera . . . . $=\frac{4}{3}\pi R^3$

Vol. del cil. circoscr. . . . . $=2\pi R^3$

Vol. del cono equil. circoscr. . $=3\pi R^3$

onde la sfera, il cilindro circoscritto ed il cono equilatero circoscritto stanno tra loro nella ragione di $\frac{4}{3}:2:3$: ossia $::4:6:9$.

Il volume del cilindro circoscritto è dunque medio proporzionale tra quello della sfera e quello del cono equilatero circoscritto.

II. *Trovare la ragione che passa tra i volumi della sfera, del cilindro equilatero inscritto e del cono equilatero inscritto.*

Essendo R il raggio della sfera, il raggio e l'altezza del cilindro equilatero inscritto sono rispettivamente $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ e $R\sqrt{2}$, ed il raggio della base e l'altezza del cono equilatero inscritto sono

$$\frac{1}{2}R\sqrt{3} \text{ e } \frac{3}{2}R;$$

quindi risultano le espressioni seguenti pei volumi de'tre corpi:

Sfera . . . . $=\frac{4}{3}\pi R^3$;

Cilindro equil. inscritto . . $=\frac{1}{2}\pi R^3\sqrt{2}$;

Cono equilat. inscritto . . $=\frac{3}{8}\pi R^3$;

dunque questi tre corpi stanno fra loro

$$::\frac{4}{3}:\frac{1}{2}\sqrt{2}:\frac{3}{8} \text{ ossia } ::32:12\sqrt{2}:9.$$

onde si scorge che il volume del cilindro equilatero inscritto è anche medio proporzionale tra quello della sfera e quello del cono equilatero inscritto.

III. *Dato il lato* L *di un cubo, trovare il volume della sfera circoscritta.*

La diagonale del cubo espressa per $L\sqrt{3}$ sarà il diametro della sfera dimandata: onde il suo volume sarà espresso per

$$\frac{1}{6}\pi L^3\times 3\sqrt{3}=\frac{1}{2}\pi L^3\sqrt{3}.$$

IV. *Costruire un cilindro di altezza data* $=A$ *e di superficie data* $=B$, *oppure di volume dato* $=C$.

Chiamando R il raggio del cilindro, la superficie ed il volume di esso sono rispettivamente espressi per

$$2\pi R.\,A \text{ e } \pi R^2.\,A;$$

onde essendo data l'altezza e la superficie B, si farà

$$2\pi R.\,A=B; \text{ e si troverà } R=\frac{B}{2\pi A}:$$

e quando è data l'altezza ed il volume C, si farà

$$\pi R^2.\,A=C, \text{ e risulterà } R=\sqrt{\frac{C}{\pi A}};$$

e così conoscendo il raggio R e l'altezza A si potrà costruire il cilindro.

V. *Dato il raggio* R *e l'altezza* A *di un cono, trovare l'espressione della sua superficie.*

Chiamando L il lato del cono, sarà

$$L=\sqrt{R^2+A^2};$$

onde la superficie sarà espressa per

$$2\pi R\times\frac{1}{2}\sqrt{R^2+A^2}=\pi R\sqrt{R^2+A^2}.$$

VI. *Il lato di un cono è* $8^{m\cdot}$, *e la sua altezza è* $5^{m\cdot}$, *trovare la sua superficie ed il suo volume.*

Si troverà il raggio della base

$$R=\sqrt{64-25}=\sqrt{39}=6^{m\cdot},245;$$

onde risulterà

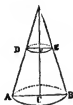
Circonferenza della base $2\pi R=39^{m\cdot},254$;

Superficie convessa $=39,254.4=157^{mq\cdot},016$;

Superficie della base $=\pi.39=122^{mq\cdot},522$;

$$\text{Volume}=\frac{1}{3}\pi.39.5=204^{mc\cdot},203.$$

VII. *Trovare l'altezza ed il lato del cono intero, di cui fa parte un cono tronco dato, e dedurne l'espressione del volume e della superficie convessa del tronco.*

Fig. 231.

Sia ADEB (fig. 231) il tronco dato: chiamando R e r i raggi AC e Dc delle basi, A l'altezza Cc, ed L il lato AD del tronco,

e supponendo il cono compiuto, si avrà $R:r::SC:Sc$; e quindi

$$R-r:R::A:SC=\frac{AR}{R-r},$$

e
$$R-r:r::A:Sc=\frac{Ar}{R-r}.$$

Onde chiamando V e v i volumi de' due coni SAB e SDE, sarà

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\times\frac{AR}{R-r}=\frac{1}{3}A\pi.\frac{R^3}{R-r};$$

e
$$v=\frac{1}{3}\pi r^2\times\frac{Ar}{R-r}=\frac{1}{3}A\pi.\frac{r^3}{R-r};$$

la differenza $V-v$ darà il volume del tronco ADEB uguale ad

$$\frac{1}{3}A\pi\left(\frac{R^3-r^3}{R-r}\right)=\frac{1}{3}A\pi\left(R^2+Rr+r^2\right)$$

ossia

$$=\frac{1}{3}A\left(\pi R^2+\pi Rr+\pi r^2\right),$$

conforme all'enunciato della proposizione VI.

Per ottenere l'espressione della superficie convessa del tronco ADEB, si dee partire dalla proporzione $R:r::SA:SD$, dalla quale si ricava

$$R-r:R::AD \text{ ossia } L:SA=\frac{RL}{R-r},$$

$$R-r:r::L:SD=\frac{rL}{R-r}:$$

onde rappresentando con S e s le superficie dei due coni SAB e SDE, sarà

$$S=2\pi R.\frac{1}{2}.\frac{RL}{R-r}=L\pi.\frac{R^2}{R-r};$$

$$s=2\pi r.\frac{1}{2}.\frac{rL}{R-r}=L\pi.\frac{r^2}{R-r};$$

epperò la superficie del tronco rappresentata da $S-s$ sarà espressa per

$$L\pi\left(\frac{R^2-r^2}{R-r}\right)=L\pi(R+r)=L(\pi R+\pi r);$$

cioè eguale al prodotto del lato del tronco per la semisomma delle circonferenze delle due basi.

VIII. *Dato un cono, svilupparne la superficie in piano e trovare il numero de' gradi dell'arco che chiude il settore.*

Sia R il raggio della base ed L il lato del cono dato: si cercherà quanti gradi conterrà un arco di lunghezza eguale a $2\pi R$ sopra una circonferenza del raggio L: si avrà dunque

$$2\pi L:2\pi R::360^\circ:x=360^\circ\times\frac{R}{L}.$$

Così quando L è doppio di R, l'arco del settore è di 180°; onde la superficie convessa del cono equilatero è eguale ad un semicircolo del raggio eguale al lato del cono; se L fosse triplo di R, l'arco del settore sarebbe di 120°.

IX. *Dato un settore circolare, costruire il cono, la cui superficie sviluppata coincide con quel settore.*

Sia L il raggio del settore dato, n il numero dei gradi

del suo arco, ed x il raggio della base del cono: la superficie del settore è eguale a

$$\pi L^2 \times \frac{n}{360},$$

e quella del cono è espressa per

$$2\pi x \times \frac{1}{2} L = \pi L x;$$

sarà dunque

$$\pi L x = \pi L^2 \times \frac{n}{360};$$

onde

$$x = L \times \frac{n}{360}.$$

Facendo $n=180°$ si troverà x ossia il raggio della base del cono, eguale ad $\frac{1}{2}$L: e quando $n=120°$, sarà x ossia $R=\frac{1}{3}L$: così conoscendo il lato L del cono ed il raggio R della base, si troverà l'altezza

$$=\sqrt{L^2-R^2},$$

e si potrà quindi costruire il cono dimandato.

Scolio. Se invece del numero de'gradi n fosse data la lunghezza A dell'arco, la superficie del settore sarebbe allora espressa per $\frac{1}{2}$AL; e si avrebbe

$$\pi L x = \frac{1}{2} AL; \text{ onde } x = \frac{A}{2\pi};$$

si troverebbe dunque il raggio della base del cono dividendo la lunghezza data dell'arco per 2π.

X. *Trovare il raggio di una sfera equivalente ad un cubo, ad un cilindro, ad un cono dati, od alla somma, od alla differenza di più sfere date.*

Si esprimeranno numericamente i volumi del cubo, del cilindro, del cono dati, della somma o della differenza delle sfere date, ed allora il problema riviene a trovare il raggio di una sfera di volume dato$=$C.

Sia R il raggio cercato della sfera; il suo volume sarà espresso per $\frac{4}{3}\pi R^3$: si farà dunque

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = C;$$

onde

$$R^3 = \frac{3C}{4\pi}, \text{ ed } R = \sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}.$$

Così se il volume della sfera dovesse essere di 100 metri cubi, si farebbe C$=$100 e si avrebbe

$$R = \sqrt[3]{\frac{300}{4\pi}} = \sqrt[3]{23,8732.} = 2^{m}, 88 \text{ prossimamente.}$$

FINE.

INDICE

LIBRO I.

Definizioni.

Proposizioni.

LIBRO II.

Ragioni o rapporti de' parallelogrammi e de' triangoli: misura delle figure rettilinee.

Definizioni.

Proposizioni

Problemi da risolversi.

LIBRO III.

Linee proporzionali e figure simili.

Definizioni.

Proposizioni.

Problemi da risolversi.

LIBRO IV.

Proprietà del circolo e delle linee rette in esso considerate: misura degli angoli.

Definizioni.

Proposizioni.

Problemi da risolversi.

LIBRO V.

Poligoni regolari inscritti e circoscritti al circolo: misura del circolo.

———

Definizioni.

Proposizioni.

Problemi da risolversi.

LIBRO VI.

Piani e linee rette considerate nello spazio: angoli diedri ed angoli solidi.

——

Definizioni.

Proposizioni.

LIBRO VII.

Solidi poliedri, ossia corpi terminati da piani.

— —

Definizioni.

Proposizioni.

Problemi da risolversi.

LIBRO VIII.

Dei tre corpi rotondi, ossia del cilindro retto, del cono retto e della sfera.

—

Definizioni.

Proposizioni.

Problemi da risolversi